SECTION III.

Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe *MDM* dont les appliquées *PM*, *ED*, *PM* soient paralleles entr'elles; & qui soit telle que la coupée *AP* croissant continuëllement, l'appliquée *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, aprés lequel elle diminuë; ou au contraire qu'elle diminuë jusqu'à un certain point *E*, aprés lequel elle croisse. Cela posé, FIG. 31. 32. 33. 34.

La ligne *ED* sera nommée *la plus grande*, ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que *PM*, qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que *AP*, laquelle *AP* croissant continuëllement, cette quantité *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, aprés lequel elle diminuë, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour *AP*, une valeur *AE* telle que la quantité *ED* qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité *PM* semblablement formée de *AP*. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis*.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. LA *nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED *soit la plus grande ou la moindre de ses semblables* PM.

Lorsque *AP* croissant, *PM* croît aussi; il est évident* que sa différence *Rm* sera positive par rapport à celle de *AP*; & qu'au contraire lorsque *PM* diminuë, la coupée *AP* croif- * *Art. 8. 10.*

sant toûjours, sa différence sera négative. Or toute quantité qui croît ou diminuë continuëllement, ne peut devenir de positive négative, qu'elle ne passe par l'infini ou par le zero; sçavoir par le zero lorsqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorsqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il suit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe MDM étant donnée, on trouvera* une valeur de Rm, laquelle étant égalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à découvrir la valeur cherchée de AE dans l'une ou l'autre de ces suppositions.

* Sect. 1. ou 2.

REMARQUE.

FIG. 31. 32. 47. LA tangente en D est parallele à l'axe AB lorsque la différence Rm devient nulle dans ce point; mais lorsqu'elle devient infinie, la tangente se confond avec l'appliquée ED. D'où l'on voit que la raison de mR à RM, qui exprime celle de l'appliquée à la soutangente, est nulle ou infinie sous le point D.

FIG. 33. 34.

On conçoit aisément qu'une quantité, qui diminuë continuëllement, ne peut devenir de positive négative sans passer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorsqu'elle augmente, elle doive passer par l'infini. C'est-pourquoy pour aider l'imagination, soient entenduës des tangentes aux points M, D, M; il est clair dans les courbes où la tangente en D est parallele à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continuëllement à mesure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient* négative de positive qu'elle étoit, ou au contraire.

FIG. 31. 32.

* Art. 10.

EXEMPLE I.

FIG. 35. 48. SUPPOSONS que $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$,

& $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = 0$ lorſque le point P tombe ſur le point cherché E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes ſes ſemblables PM.

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero; mais parce que cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = 0$, d'où l'on tire $x = a$, qui eſt la valeur cherchée de AE. FIG. 33.

EXEMPLE III.

50. SOIT une demi-roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. FIG. 36.

Ayant mené à diſcretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a; BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette ANB (a). BF (b) :: AN (u). $NM = \frac{bu}{a}$. Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & ſa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = 0$ lorſque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles réctangles NSn, NPC ſont ſemblables; car ſi l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les reſtes SNn, PNC ſeront égaux. Et partant CN (c). CP

$(c-x)$ :: Nn (du). Sn $(dz) = \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas $AE) = c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatriéme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celuy qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

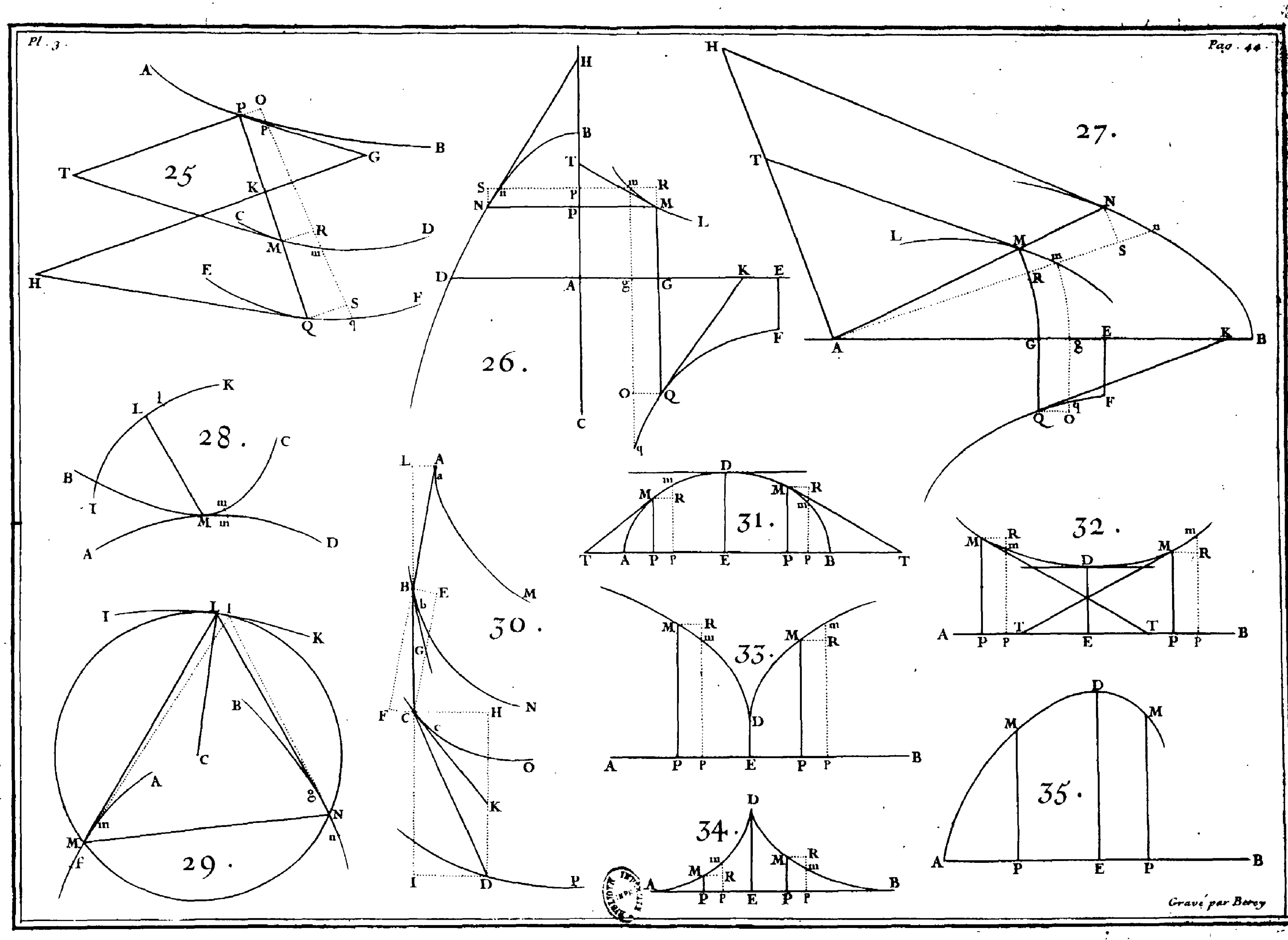
FIG. 35. 51. COUPER la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

Ayant nommé l'inconnuë AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'est-pourquoy on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP (y) à la coupée AP (x) soit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED soit la plus grande de toutes ses semblables PM; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a-x}^n$ soit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit soit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = o$, d'où en divisant par $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & AE $(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le problême ainsi.

FIG. 37. Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E, en sorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ soit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM sera


25
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
Gravé par Berey

$\frac{xx}{x-a}=y$, dans laquelle si l'on suppose $x=a$, l'appliquée PM qui devient BC sera $\frac{aa}{o}$, c'est-à-dire infinie; & supposant x infinie, l'on aura $y=x$, c'est-à-dire que l'appliquée sera aussi infinie.

Si $m=1$, & $n=-2$, l'on aura $AE=-a$; d'où il suit que l'on doit énoncer le problême alors en cette sorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E, en sorte que la quantité $\frac{AE\times\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ soit plus grande que tout autre quantité semblable $\frac{AP\times\overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. FIG. 38.

EXEMPLE V.

52. LA ligne droite AB étant divisée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper sa partie du milieu CF au point E, en sorte que le rapport du réctangle $AE\times EB$ au réctangle $CE\times EF$ soit moindre que tout autre rapport formé de la même maniére. FIG. 39.

Ayant nommé les données AC, a; CF, b; CB, c; & l'inconnuë CE, x; l'on aura $AE=a+x$, $EB=c-x$, $EF=b-x$, & partant le rapport de $AE\times EB$ à $CE\times EF$ sera $\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$ qui doit être *un moindre*. C'est-pourquoy si l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) soit exprimée par l'équation $y=\frac{aac+acx-aax-axx}{bx-xx}$, la question se réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED soit la moindre de toutes ses semblables PM. On formera donc (en prenant les différences, & divisant ensuite par adx) l'égalité $cxx-axx-bxx+2acx-abc=o$, dont l'une des racines résout la question.

Si $c=a+b$, l'on aura $x=\frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inscrits

dans une ſphére, déterminer celuy qui a la plus grande ſurface convexe.

FIG. 40. La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diametre AB du demi-cercle AFB le point E, en ſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le réctangle $AF \times FE$ ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables $AN \times NP$. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiére autour du diametre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphére, & que les triangles réctangles AEF, APN décriront des cones inſcrits dans cette ſphére, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, ſeront entr'elles comme les réctangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnuë $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la proprieté du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'eſt-pourquoy on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, en ſorte que l'appliquée ED ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. ON demande entre tous les Parallélépipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celuy qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipede, leur ſomme ſçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre*. C'eſt-pourquoy concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trouvera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = 0$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de sorte que les trois côtés du parallélépipede qui satisfait à la question, seront le premier b, le second $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, & le troisiéme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, sont égaux entr'eux.

EXEMPLE VIII.

55. On demande presentement entre tous les Parallélépipedes qui sont égaux à un cube donné a^3, celuy qui a la moindre superficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il est clair par l'éxemple précédent, que les deux autres côtés seront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie, sera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3x}$ qui doit être *un moindre*. C'est-pourquoy sa différence $-\frac{a^3dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = 0$, d'où l'on tire $x = a$; & par-conséquent les deux autres côtés seront aussi chacun $= a$; de sorte que le cube même donné satisfait à la question.

EXEMPLE IX.

56. La ligne AEB étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorsqu'elle est composée des droites CP, PF. FIG. 41.

Supposons que les lignes CE, EF ayent la position requise; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM telle qu'ayant mené à discrétion PQM perpendiculaire sur CF, l'appliqué QM exprime la quantité donnée: il est clair que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zero ou à l'infini : c'est-pourquoy si la quantité donnée est par exemple $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = o$, & par-conséquent $du. - dz :: 2z. a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du; c'est-à-dire que la position des droites CE, EF doit être telle que u croissant, z diminuë.

Maintenant si l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ses points quelconques G les perpendiculaires GL, GI sur CE, EF; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment prés de E, les droites CKe, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH : on formera les triangles réctangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui seront semblables entr'eux ; car si l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les restes LEG, KEe seront égaux ; on prouvera de même que les angles IEG, HEe seront égaux. On aura donc $GL. GI :: Ke\ (du). He\ (-dz) :: 2z. a$. D'où il suit que la position des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG sur la ligne AEB; le sinus GL de l'angle GEC soit au sinus GI de l'angle GEF, comme les quantités qui multiplient dz sont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. Si l'on veut à présent que la droite CE soit donnée de position & de grandeur, que la droite EF le soit de grandeur seulement, & qu'il faille trouver sa position; il est clair que l'angle GEC étant donné, son sinus GL le sera aussi, & par-conséquent le sinus GI de l'angle cherché GEF. Donc si l'on décrit un cercle du diametre EG, & que l'on porte la valeur de GI sur sa circonférence de G en I; la droite EF qui passe par le point I aura la position requise.

Soit $au + bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne ne à EC & à EF, la position de cette derniere sera toûjours la même, puisqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par-conséquent ne change point. Si $a = b$, il est clair que la position de EF doit être sur CE prolongée du côté de E; puisque $GL = GI$, lorsque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB: mais lorsqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG. FIG. 42.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle; trouver sur sa circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible. FIG. 42.

Suppòsant que le point E soit celuy que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG, il est clair qu'elle sera perpendiculaire sur la circonférence AEB; & partant * que les angles FEG, CEG seront égaux entr'eux. Si donc l'on mene EH en sorte que l'angle EHO soit égal à l'angle CEO, & de même EK en sorte que l'angle EKO soit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC; on formera les triangles semblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE; & en nommant les connuës OE ou OA ou OB, a; OC, b; OF, c; & les inconnuës OD ou LE, x; DE ou OL, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$, & HD $(x - \frac{aa}{b})$. DE (y) :: KL $(y - \frac{aa}{c})$. LE (x). Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui est une équation à une hyperbole que l'on construira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E. * *Art.* 57.

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté de C l'espace a dans le tems c, & dans l'autre du FIG. 43.

côté de F l'espace b dans le même tems c: on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F. Si l'on fait $a.\ CE\ (u) :: c.\ \frac{cu}{a}$. Et $b.\ EF\ (z) :: c.\ \frac{cz}{b}$. il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celuy qu'il employe à parcourir EF; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit

*Art. 56. * qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI; l'on aura $a.\ b :: GL.\ GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parce que les triangles réctangles GEL & ECA, GEI & EHD sont égaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est-pourquoy si l'on nomme l'inconnuë AE, x; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connuës AB, f; AC, g; BF, h; les triangles semblables EBF, EDH donneront $EB\ (f-x).\ BF\ (h) :: ED\ (\frac{bx}{a}).\ DH = \frac{bhx}{af-ax}$. Mais à cause des triangles réctangles EDH, EAC, qui ont leurs hypotenuses EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est-à-dire en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$: De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{lllll} aax^4 & -\ 2aafx^3 & +\ aaffxx & -\ 2aafggx & +\ aaffgg = 0. \\ -\ bb & +\ 2bbf & +\ aagg & & \\ & & -\ bbff & & \\ & & -\ bbhh & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniére qui suit, sans avoir recours à l'éxemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connuës AB, f; AC, g; BF, h; & l'inconnuë AE, x; on fera a. CE $(\sqrt{gg+xx})$ :: c. $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE. Et de même b. EF $(\sqrt{ff-2fx+xx+hh})$ :: c. $\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = à un *moindre*; & partant sa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$ $=o$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, en sorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb D descendra le plus bas qu'il luy sera possible, au dessous de l'horizontale CB; d'où il suit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est-pourquoy nommant les données CF, a; DFB, b; CB, c; & l'inconnuë CE, x; l'on aura $EF=\sqrt{aa-xx}$, $FB=\sqrt{aa+cc-2cx}$, & $DFE=b-\sqrt{aa+cc-2cx}+\sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand*; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}}-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$ $=o$, d'où l'on tire $2cx^3-2ccxx-aaxx+aacc=o$, &

divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = 0$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniére que voicy.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant si du point f pris infiniment prés de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entr'elles; & par-conséquent les petits triangles réctangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypotenuse Ff commune, seront égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD; les triangles CBF, CFH seront semblables; comme aussi les triangles réctangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par-conséquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE\ (x - \frac{aa}{c})$. $EF\ (y) :: EF\ (y) . EC\ (x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la proprieté du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

FIG. 45. 61. L'ÉLÉVATION du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule.

Soit C le centre de la sphére; $APTOBHQ$ le méridien; $HDdO$ l'horizon; $QEeT$ le cercle crépusculaire parallele à l'horizon; *AMNB* l'équateur; *FEDG* la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuscule, renfermée entre les plans de l'horizon & du cercle crépusculaire; *P* le pole austral; *PEM*, *PDN* des quarts de cercles de déclinaison. L'arc *HQ* ou *OT* du méridien compris entre l'horizon & le cercle crépusculaire, & l'arc *OP* de l'élévation du pole sont donnés; & par-conséquent leurs sinus droits *CI* ou *FL* ou *QX*, & *OV*. L'on cherche le sinus *CK* de l'arc *EM* ou *DN* de la déclinaison du Soleil lorsqu'il décrit le parallele *ED*.

S'imaginant une autre portion *fedg* d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de *FEDG*, avec les quarts de cercles *Pem*, *Pdn*; il est clair que le temps que le Soleil employe à parcourir l'arc *ED*, devant être un *moindre*, la différence de l'arc *MN* qui en est la mesure, & qui devient *mn* lorsque *ED* devient *ed*, doit être nulle; d'où il suit que les petits arcs *Mm*, *Nn*, & par-conséquent les petits arcs *Re*, *Sd* seront égaux entr'eux. Or les arcs *RE*, *SD* étant renfermés entre les mêmes paralleles *ED*, *ed*, sont aussi égaux, & les angles en *S* & en *R* sont droits. Donc les petits triangles réctangles *ERe*, *DSd* (que l'on considére comme réctilignes* à cause de l'infinie petitesse de leurs côtés, seront égaux & semblables; & par-conséquent les hypotenuses *Ee*, *Dd* seront aussi égales entr'elles. *Art. 3.

Cela posé, les droites *DG*, *EF*, *dg*, *ef* communes sections des plans *FEDG*, *fedg* paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépusculaire, seront perpendiculaires sur les diametres *HO*, *QT*, puisque les plans de tous ces cercles sont perpendiculaires chacun sur le plan du méridien; & les petites droites *Gg*, *Ff* seront égales entr'elles, puisque les droites *FG*, *fg* sont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il est clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que si l'on mene à discrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, sera à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre ; ce qui donne ici (à cauſe des cercles HDO, QET) $CO.\ CG :: Dd$ ou $Ee.\ DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ.\ IF :: CO + IQ$ ou $OX.\ CG + IF$ ou GL. Mais à cauſe des triangles réctangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on aura $CO.\ CG :: OV.\ GK$. Et $GK.\ GL :: CK.\ FL$ ou QX. Donc $OV.\ CK :: OX.\ XQ :: XQ.\ XH$ par la proprieté du cercle : c'eſt-à-dire que ſi l'on prend QX pour le rayon ou ſinus total dans le triangle réctangle QXH, dont l'angle HQX eſt de 9 degrés, parce que les Aſtronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élévation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le temps du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élévation du pole ; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.