L'Hospital, Guillaume-François-Antoine de (1661-1704). Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. 1696.

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DÉFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminuë continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*: *Pp* sera la différence de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

Fig. 1.

COROLLAIRE.

1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caracteristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'espace mixtiligne* APM, s; *& le segment* AM, t: dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même

chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'espace Apm pour l'espace APM, le petit espace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c.

II. Demande ou Supposition.

3. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

Avertissement.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes : de sorte que* x *devenant* x + dx ; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* **Et* a, b, c, *&c. demeurent les mesmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

Proposition I.

Problême.

4. Prendre *la différence de plusieurs quantités ajoûtées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y de-

* *Art. 1.* viendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la constante a,* elle demeurera la même a: de sorte que la quantité proposée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx+dy-dz$. Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette régle.

Regle I.

Pour les quantités ajoûtées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

Proposition II.

Problême.

5. Prendre *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy est $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui est le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & sa différence sera $ydx+xdy+dxdy$, c'est-à-dire * $ydx+xdy$: puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

* *Art. 2.*

2°. La différence de xyz est $yzdx+xzdy+xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx+xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $xo + adx$, c'est-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantitez variables x & yz doivent toûjours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant*on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle. * Art. 5.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. PRENDRE *la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposans.

Si l'on propose une progression geométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmetique.

Prog. geom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continuë la progression geométrique au dessous de l'unité, & l'arithmetique au dessous de zero, les termes de celle-cy seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celuy de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. geom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression geométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmetique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expresſions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{5}}$, &c. ne ſignifient que la même choſe.

Prog. geom. $1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$

Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$

Prog. geom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$

Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2.\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2.\ -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ eſt moyenne geométrique entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{2}$ eſt moyenne arithmetique entre leurs expoſans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ eſt la premiere des deux moyennes geométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{3}$ eſt la premiere des deux moyennes arithmetiquement proportionnelles entre leurs expoſans zero & 1 : & il en eſt ainſi des autres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions.

1°. Que la ſomme des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par luy même, c'eſt-à-dire ſon quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 eſt le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'eſt-à-dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ou $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatriéme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion geométrique ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de ces termes. Ainſi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'eſt la même choſe de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviſer $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en eſt ainſi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas lorſque la puiſſance eſt parfaite, c'eſt-à-dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre entier. La différence de xx eſt $2xdx$, de x^3 eſt $3xxdx$, de x^4 eſt $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre choſe que le produit de x par x, ſa différence* ſera $xdx + xdx$, c'eſt-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre choſe que le produit de x par x par x, ſa différence *ſera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'eſt-à-dire $3xxdx$; & comme il en eſt ainſi des autres puiſſances à l'infini, il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m ſera $mx^{m-1}dx$.

*Art. 5.

Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ ſera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorſque la puiſſance eſt imparfaite, c'eſt-à-dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre rompu. Soit propoſé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on ſuppoſera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puiſſance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} ſa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ ſera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toûjours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est-à-dire de $\overline{ay - xx}^3$, est $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, ou de $\overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3} \times \overline{ax + xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ou de $\overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$.

Art. 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle* & celle des fractions $\frac{\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx}}\times\sqrt{xy+yy}-\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

8. Il est à propos de bien remarquer que l'on a toûjours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi; c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est-pourquoy s'il arrive que quelques-unes diminüent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par-conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminüent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminüent, c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veüille prendre la différence du produit xyz; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée *, les signes des termes où dy & dz se rencontrent; ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

Art. 5.