la dernière fraction $\frac{\gamma}{\gamma'}$ est moindre que la vraie valeur de la fraction continue, les fractions dont il s'agit seront toutes plus petites que cette valeur, et seront en même temps convergentes vers cette même valeur.

On fera le même raisonnement par rapport à toutes les autres fractions principales, et si l'on ajoute à ces fractions les deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$, dont la première est toujours plus petite, et dont la seconde est plus grande que toute quantité donnée, on pourra former deux séries de fractions convergentes vers la valeur cherchée, dont l'une contiendra toutes les fractions plus petites que cette valeur, et dont l'autre contiendra toutes les fractions plus grandes que la même valeur.

Fractions plus petites.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, \ldots, & \frac{p}{1}, & \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right), \\[1ex]
\frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'}, & \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}, & \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}, \ldots, & & \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'}, & \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right), \\[1ex]
\frac{\delta+\gamma}{\delta'+\gamma'}, & \frac{2\delta+\gamma}{2\delta'+\gamma'}, & \frac{3\delta+\gamma}{3\delta'+\gamma'}, \ldots, & & \frac{t\delta+\gamma}{t\delta'+\gamma'}, & \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & & \ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

Fractions plus grandes.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{0}, & \frac{\alpha+1}{\alpha'+1}, & \frac{2\alpha+1}{2\alpha'+1}, & \frac{3\alpha+1}{3\alpha'+1}, \ldots, & \frac{q\alpha+1}{q\alpha'+1}, & \left(\frac{\beta}{\beta'}\right), \\[1ex]
\frac{\gamma+\beta}{\gamma'+\beta'}, & \frac{2\gamma+\beta}{2\gamma'+\beta'}, & & \frac{3\gamma+\beta}{3\gamma'+\beta'}, \ldots, & \frac{s\gamma+\beta}{s\gamma'+\beta'}, & \left(\frac{\delta}{\delta'}\right), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

Quant à la nature de ces fractions, il est facile de prouver, comme nous l'avons fait par rapport aux fractions principales : 1° que chacune de ces fractions sera déjà réduite à ses moindres termes; d'où il s'ensuit que, comme les numérateurs et les dénominateurs vont en augmentant, ces fractions se trouveront toujours exprimées par des termes plus grands à mesure qu'elles s'éloigneront du commencement de la série; 2° que chaque fraction de la première série approchera de la valeur de x plus qu'aucune autre fraction quelconque qui serait moindre que cette valeur, et qui aurait un dénominateur plus petit que celui de la même fraction; et que, de même, chaque fraction de la seconde série approchera plus de la valeur de x que ne pourrait faire toute autre fraction qui serait plus grande que cette valeur, et qui aurait un dénominateur plus petit que celui de la même fraction.

En effet, s'il y avait une fraction comme $\frac{\mu}{\mu'}$ plus petite que la valeur de x, et en même temps plus approchante de cette valeur que la fraction $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, par exemple, en supposant $3\beta'+\alpha'>\mu'$, il faudrait $\Big($à cause que la fraction $\frac{\beta}{\beta'}$ est plus grande que la valeur dont il s'agit$\Big)$ que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre les deux quantités

$$\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\beta'};$$

donc la quantité

$$\frac{\beta}{\beta'}-\frac{\mu}{\mu'}$$

devrait être

$$<\frac{\beta}{\beta'}-\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}<\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\beta'(3\beta'+\alpha')}<\frac{1}{\beta'(3\beta'+\alpha')};$$

donc il faudrait que $\mu'\beta-\mu\beta'$ fût $<\frac{\mu'}{3\beta'+\alpha'}<1$, ce qui ne se peut.

Au reste, il peut arriver qu'une fraction d'une série n'approche pas si près qu'une autre de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples; mais cela n'arrive jamais quand la fraction qui a le plus grand dénominateur est une fraction principale (23).

§ IV. — *Application des méthodes précédentes à quelques exemples.*

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a résolue par sa méthode, savoir

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Je commence par chercher par les formules du n° **8** l'équation en v qui résulte de cette équation; je fais donc

$$m = 3, \quad A = 0, \quad B = -2, \quad C = 5;$$

j'aurai

$$n = \frac{3.2}{2} = 3,$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 4, \quad A_3 = 15, \quad A_4 = 8, \quad A_5 = 50, \quad A_6 = 91;$$

donc

$$a_1 = 12, \quad a_2 = 72, \quad a_3 = -1497,$$

et, de là,

$$a = 12, \quad b = 36, \quad c = -643;$$

de sorte que l'équation cherchée sera

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

Or, puisque cette équation n'a pas les signes alternativement positifs et négatifs, j'en conclus sur-le-champ que l'équation proposée a nécessairement deux racines imaginaires, et par conséquent une seule réelle (**16**).

Ainsi, les nombres à substituer à la place de x seront les nombres naturels 0, 1, 2, 3,... (**6**).

Je suppose d'abord x positif, et je cherche la limite des valeurs de x par les méthodes du n° **12** : je trouve $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} < 3$; ainsi, 3 sera la limite cherchée en nombres entiers, de sorte qu'il suffira de faire successivement $x = 0, 1, 2, 3$, ce qui donnera ces résultats $-5, -6, -1, 16$; d'où l'on voit que la racine réelle de l'équation proposée sera entre les nombres 2 et 3, et qu'ainsi 2 sera la valeur entière la plus approchée de cette racine (**2**).

Je fais maintenant, suivant la méthode du § III, $x = 2 + \frac{1}{y}$; j'ai, en substituant et ordonnant les termes par rapport à y, l'équation

$$y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0,$$

dans laquelle j'ai changé les signes pour rendre le premier terme positif.

Cette équation aura donc nécessairement une seule racine plus grande que l'unité (19), de sorte que, pour en trouver la valeur approchée, il n'y aura qu'à substituer les nombres 0, 1, 2, 3,.. , jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire.

Pour ne pas faire beaucoup de substitutions inutiles, je remarque qu'en faisant $y = 0$ j'ai un résultat négatif, et qu'en faisant $y = 10$ le résultat est encore négatif; je commence donc par le nombre 10, et je fais successivement $y = 10, 11, \ldots$. Je trouve d'abord les résultats -61, $54, \ldots$; d'où je conclus que la valeur approchée de y est 10; donc $q = 10$.

Je fais donc $y = 10 + \frac{1}{z}$, j'aurai l'équation

$$61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0,$$

et, supposant successivement $z = 1, 2, \ldots$, j'aurai les résultats -54, $71, \ldots$; donc $r = 1$.

Je fais encore $z = 1 + \frac{1}{u}$; j'aurai

$$54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0,$$

et, supposant $u = 1, 2, \ldots$, j'aurai les résultats -71, $293, \ldots$; donc $s = 1$, et ainsi de suite.

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres

$$2, \quad 10, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 1, \quad 12, \ldots,$$

de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}},$$

d'où l'on tirera les fractions (23)

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \ldots,$$

lesquelles seront alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de x.

La dernière fraction $\frac{16415}{7837}$ est plus grande que la racine cherchée; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$ (23, 2°), c'est-à-dire moindre que 0,000 000 016 3; donc, si l'on réduit la fraction $\frac{16415}{7837}$ en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la septième décimale; or, en faisant la division, on trouve 2,094 551 486 5,...; ainsi, la racine cherchée sera entre les nombres 2,094 551 49 et 2,094 551 47.

Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,094 551 47 (*voyez* sa *Méthode des suites infinies*), d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact; mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude.

26. Quant aux deux autres racines de la même équation, nous avons déjà vu qu'elles doivent être imaginaires; néanmoins, si l'on voulait en trouver la valeur, on le pourrait par la méthode du n° **17**.

Pour cela, on reprendra l'équation en v trouvée ci-dessus, et, en y changeant v en w, on aura

$$w^3 + 12w^2 - 36w - 643 = 0,$$

et il ne s'agira plus que de chercher une racine réelle et positive de cette équation. Or, puisqu'elle a son dernier terme négatif, elle aura nécessairement une telle racine, dont on pourra trouver la valeur entière la plus approchée (3) par la substitution successive des nombres naturels 0, 1, 2, 3,.... En effet, en faisant $\varpi = 6$, on aura le résultat -211, et en faisant $\varpi = 7$, on aura $+40$; ainsi, la valeur entière la plus approchée de la racine positive de cette équation sera 6.

On fera donc maintenant $\varpi = 6 + \frac{1}{u}$, et, en substituant, on aura, après avoir changé les signes,

$$211u^3 - 216u^2 - 30u - 1 = 0.$$

Faisant successivement $u = 0, 1, 2, \ldots$, on aura les résultats -1, -36, $+53$; donc 1 sera la valeur entière approchée de u.

On fera donc $u = 1 + \frac{1}{x}$, et l'on aura, en substituant et changeant les signes,

$$36x^3 - 171x^2 - 417x - 211 = 0.$$

En faisant successivement $x = 0, 1, 2, \ldots$, on trouvera des résultats négatifs jusqu'à la supposition de $x = 7$, qui donne 9218 pour résultat, de sorte que 6 sera la valeur entière approchée de x.

On fera donc $x = 6 + \frac{1}{y}, \ldots$.

De cette manière, on approchera de plus en plus de la valeur de ϖ, laquelle sera exprimée par cette fraction continue

$$\varpi = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}},$$

d'où l'on tire les fractions particulières

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{7}{1}, \quad \frac{48}{7}, \ldots.$$

Connaissant ainsi ϖ, on aura (17) $\beta = \frac{\sqrt{\varpi}}{2}$; ainsi l'on connaîtra β.

On substituera maintenant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x dans l'équation proposée, et faisant deux équations séparées des termes tout réels et de ceux qui sont affectés de $\sqrt{-1}$, on aura les deux équations

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0,$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0.$$

On cherchera le plus grand commun diviseur de ces deux équations, et l'on poussera seulement la division jusqu'à ce que l'on arrive à un reste où α ne se trouve qu'à la première puissance (numéro cité); ce reste sera

$$-\frac{8\beta^2 + 4}{3}\alpha - 5,$$

lequel, étant fait $= 0$, donnera

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}.$$

Ainsi l'on aura la valeur des deux racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ de l'équation proposée.

27. Prenons pour second exemple l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On aura encore ici $m = 3$, et par conséquent $n = 3$; ensuite,

$$A = 0, \quad B = -7, \quad C = -7;$$

d'où

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 14, \quad A_3 = -21, \quad A_4 = 98, \quad A_5 = -245, \quad A_6 = 833;$$

et, de là,

$$a_1 = 42, \quad a_2 = 882, \quad a_3 = 18669,$$

et enfin

$$a = 42, \quad b = 441, \quad c = 49;$$

de sorte que l'équation en v sera

$$v^3 - 42v^2 + 441v - 49 = 0.$$

Puisque les signes de cette équation sont alternatifs, c'est une marque que la proposée peut avoir toutes ses racines réelles (**16**), et comme d'ailleurs cette équation n'est point divisible par v, il s'ensuit que l'équation en x n'aura point de racines égales (**15**).

On fera maintenant (**11**) $v = \frac{1}{y}$, et, ordonnant l'équation par rapport à y, on aura

$$y^3 - 9y^2 + \frac{42}{49}y - \frac{1}{49} = 0.$$

Le plus grand coefficient négatif étant 9, on pourrait prendre $l = 10$ (**12**), mais on peut trouver une limite plus proche en cherchant le plus petit nombre entier qui rendra positives ces trois quantités

$$l^3 - 9l^2 + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49},$$
$$3l^2 - 18l + \frac{42}{49},$$
$$3l - 9,$$

et l'on trouvera que $l = 9$ satisfait à ces conditions, de sorte qu'on aura $k = 3$ (**11**), et par conséquent $\Delta = \frac{1}{3}$.

On mettra donc (**13**, 2°), dans l'équation proposée, $\frac{x}{3}$ à la place de x, ce qui la réduira à celle-ci

$$x^3 - 63x + 189 = 0,$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à substituer les nombres naturels 0, 1, 2,... à la place de x. Or, suivant la méthode (**13**, 3°), on trouve que la série des résultats ne contient que deux variations de signes, lesquelles répondent à $x = 4, 5, 6$; de sorte que l'équation proposée n'aura que deux racines positives, lesquelles tomberont, l'une entre les nombres $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, et l'autre entre les nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$; d'où l'on voit que la valeur entière la plus approchée de l'une et de l'autre sera 1 (**2**).

Faisons maintenant x négatif pour avoir aussi les racines négatives (**4**), et l'équation se changera en

$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$

laquelle, ayant son dernier terme négatif, aura sûrement une racine positive (**3**), et il est clair qu'elle n'en aura qu'une seule, puisque nous avons déjà trouvé les deux autres; ainsi l'on pourra d'abord trouver la valeur entière approchée de cette racine en substituant, à la place de x, les nombres o, 1, 2,..., jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire (3); or, on trouve que ces substitutions sont $x = 3$ et $x = 4$; de sorte que 3 sera la valeur entière la plus approchée de x dans l'équation précédente, et par conséquent de $-x$ dans la proposée.

Ayant ainsi trouvé que l'équation a trois racines réelles, deux positives et une négative, et ayant trouvé en même temps leurs valeurs entières approchées, on pourra approcher autant qu'on voudra de la vraie valeur de chacune d'elles par la méthode du § III.

Considérons d'abord les racines positives, et faisons $x = 1 + \frac{1}{y}$ dans l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

elle deviendra celle-ci

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0,$$

laquelle, à cause que 1 est la valeur approchée de deux racines, aura nécessairement (19, 2°) deux racines plus grandes que l'unité.

J'essaye d'abord si je peux trouver les valeurs approchées de ces deux racines par la substitution des nombres entiers o, 1, 2,..., et, comme il n'y a que le terme $4y^2$ de négatif, il suffira (13, 1°) de pousser les substitutions jusqu'à ce que l'on ait $y^3 =$ ou $> 4y^2$, c'est-à-dire jusqu'à $y = 4$; or, en faisant $y = 0, 1, 2, 3, 4$, j'ai les résultats 1, 1, -1, 1, 13; d'où je conclus que les racines cherchées sont, l'une entre les nombres 1 et 2, et l'autre entre les nombres 2 et 3; de sorte que les valeurs approchées de y seront 1 et 2.

On fera donc :

1° $y = 1 + \frac{1}{z}$, et l'on aura

$$z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0,$$

équation qui n'aura plus qu'une racine réelle plus grande que l'unité (19, 2°); ainsi l'on supposera successivement $z = 1, 2, \ldots$, jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire; or, on trouve que $z=2$ donne -1, et $z=3$ donne $+7$; donc 2 sera la valeur entière approchée de z.

On fera donc $z=2+\frac{1}{u}$, et, substituant, on aura, en changeant les signes,

$$u^3+3u^2-4u-1=0.$$

On supposera de même $u=1, 2,\ldots$, et l'on trouvera que la valeur entière approchée de u sera 1.

On fera $u=1+\frac{1}{w}$, et ainsi de suite;

2° On fera $y=2+\frac{1}{z}$, et, substituant dans l'équation précédente en y, on aura, après avoir changé les signes,

$$z^3+z^2-2z-1=0;$$

cette équation n'aura, comme la précédente en z, qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité; de sorte qu'il n'y aura qu'à faire $z=1, 2,\ldots$, ce qui donne les résultats -1, 5, d'où l'on conclut que 1 est la valeur entière approchée de z.

On fera donc $z=1+\frac{1}{u}$, et l'on aura, en changeant les signes,

$$u^3-3u^2-4u-1=0,$$

d'où l'on trouvera, de la même manière que ci-dessus, que la valeur entière approchée de u sera 4.

Ainsi l'on fera $u=4+\frac{1}{w}$, et ainsi de suite.

Donc les deux racines positives de l'équation proposée seront

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}$$

D'où l'on tirera, si l'on veut, des fractions convergentes, comme dans l'Exemple précédent (**23** et **24**).

Pour trouver maintenant la valeur approchée de la racine négative, on reprendra l'équation

$$x^3 - 7x - 7 = 0,$$

dans laquelle on a déjà trouvé que la valeur entière approchée est 3; ainsi l'on fera $x = 3 + \frac{1}{y}$, ce qui donnera, en changeant les signes,

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0,$$

et, comme cette équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle plus grande que 1 (**19**, 2°), on en trouvera la valeur approchée en faisant $y = 1, 2, \ldots$, jusqu'à ce que l'on rencontre deux résultats consécutifs de signe contraire, ce qui arrivera lorsque $y = 20, 21$; de sorte que la valeur dont il s'agit sera 20.

On fera donc $y = 20 + \frac{1}{u}, \ldots$.

De cette manière, la racine négative de l'équation proposée sera

$$x = -3 - \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}$$