et il n'y aura qu'à chercher une valeur de l qui, étant substituée dans les quantités P, Q, R,..., les rende toutes positives; en commençant par la dernière de ces quantités, laquelle n'aura que deux termes, et remontant successivement aux quantités précédentes, on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour l, et qui sera la limite la plus proche cherchée.

Si l'on voulait éviter tout tâtonnement, il n'y aurait qu'à prendre pour l le plus grand coefficient des termes négatifs de l'équation (F) augmenté d'une unité; car il est facile de prouver qu'en donnant à l cette valeur, les quantités P, Q, R,... seront toujours positives.

Cette manière d'avoir la limite des racines d'une équation quelconque est due, je crois, à Maclaurin; mais en voici une autre qui donnera le plus souvent des limites plus approchées.

Soient

$$-\mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \varpi y^{r-p} - \ldots,$$

les termes négatifs de l'équation (F); on prendra pour l la somme des deux plus grandes des quantités

$$\sqrt[m]{\mu},\quad \sqrt[n]{\nu},\quad \sqrt[p]{\varpi},\ldots,$$

ou un nombre quelconque plus grand que cette somme. Cette proposition peut se démontrer de la même manière que la précédente; ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Au reste, il faut observer que les limites trouvées de l'une ou de l'autre de ces deux manières seront rarement les plus prochaines limites; pour en avoir de plus petites on essayera successivement pour l des nombres moindres, et l'on prendra le plus petit de ceux qui satisferont aux conditions que P, Q, R,... soient des nombres positifs.

13. Scolie II. — Ayant donc trouvé la limite l des racines de l'équation (F), et pris k égal ou immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, on fera $\Delta = \frac{1}{k}$ (10), et l'on substituera successivement dans l'équation proposée,

à la place de l'inconnue, les nombres

$$0,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \frac{3}{k},\ldots;$$

les résultats venant de ces substitutions formeront une série dans laquelle il y aura autant de variations de signe que l'équation proposée contiendra de racines réelles positives et inégales, et de plus chacune de ces racines se trouvera entre les deux résultats consécutifs qui seront de signe différent, de sorte que si les nombres $\frac{h}{k}$ et $\frac{h+1}{k}$ donnent des résultats de signe contraire, il y aura une racine entre $\frac{h}{k}$ et $\frac{h+1}{k}$; par conséquent le nombre entier qui approchera le plus de $\frac{h}{k}$ sera la valeur entière approchée de cette racine (2).

Ainsi l'on connaîtra, par ce moyen, non-seulement le nombre des racines positives et inégales de l'équation proposée, mais encore la valeur entière approchée de chacune de ces racines.

Au reste, il est clair que si l'on trouvait un ou plusieurs résultats égaux à zéro, les nombres qui auraient donné ces résultats seraient des racines exactes de l'équation proposée.

Pour faciliter et abréger ce calcul, on fera encore les remarques suivantes :

1° Si l'on cherche par les méthodes des numéros précédents la limite des racines positives de l'équation proposée, il est clair qu'il sera inutile d'y substituer à la place de l'inconnue des nombres plus grands que cette limite; en effet, il est facile de voir qu'en substituant des nombres plus grands que cette limite on aura toujours nécessairement des résultats positifs. Ainsi, nommant λ la limite dont il s'agit, le nombre des substitutions à faire sera égal à λk, et par conséquent toujours limité.

En général, sans chercher la limite λ, il suffira de pousser les substitutions jusqu'à ce que le premier terme de l'équation, ou la somme des premiers termes, s'il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe $+$, soit égale ou plus grande que la somme de tous les termes négatifs; car il est facile de prouver, par la méthode du n° 7, qu'en donnant à l'inconnue des valeurs plus grandes on aura toujours à l'infini des résultats positifs.

2° Au lieu de substituer à la place de l'inconnue x les fractions $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots,$ on y mettra d'abord $\frac{x}{k}$ à la place de x, ou, ce qui revient au même, on multipliera le coefficient du second terme par k, celui du troisième terme par k^2, et ainsi des autres, et l'on y substituera ensuite à la place de x les nombres naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à la limite de cette équation, ou bien jusqu'à ce que le premier terme, ou la somme des premiers, quand il y en a plusieurs consécutifs avec le même signe, soit égale ou plus grande que la somme des négatifs; par ce moyen, les résultats seront tous des nombres entiers, et les racines de l'équation proposée se trouveront nécessairement entre les nombres consécutifs qui donneront des résultats de signe contraire, ces nombres étant divisés par k, comme nous l'avons vu plus haut.

3° Soit m le degré de l'équation dans laquelle il s'agit de substituer successivement les nombres naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$; je dis que, dès qu'on aura trouvé les $m+1$ premiers résultats, c'est-à-dire ceux qui répondent à $x = 0, 1, 2, \ldots, m$, on pourra trouver tous les suivants par la seule addition.

Pour cela, il n'y aura qu'à chercher les différences des résultats trouvés, lesquelles seront au nombre de m, ensuite les différences de ces différences, lesquelles ne seront plus qu'au nombre de $m-1$, et ainsi de suite jusqu'à la différence $m^{\text{ième}}$.

Cette dernière différence sera nécessairement constante, parce que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue est m; ainsi, on pourra continuer la suite des différences $m^{\text{ièmes}}$ aussi loin qu'on voudra, en répétant seulement la même différence trouvée; ensuite, par le moyen de cette suite on pourra, par la simple addition, continuer celle des différences $(m-1)^{\text{ièmes}}$, et, à l'aide de celle-ci, on pourra continuer de même la suite des différences $(m-2)^{\text{ièmes}}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à la première suite, qui sera celle des résultats cherchés.

Il est bon d'observer ici que, si les termes correspondants des différentes suites dont nous parlons étaient tous positifs, les termes suivants dans chaque suite seraient tous aussi positifs. Or, puisque la dernière différence est toujours positive, il est clair qu'on parviendra nécessairement dans chaque suite à des termes tous positifs; ainsi, il suffira de continuer toutes ces suites jusqu'à ce que leurs termes correspondants soient devenus tous positifs, parce qu'alors on sera sûr que la série des résultats, continuée aussi loin qu'on voudra, sera toujours positive, et que par conséquent elle ne contiendra plus aucune variation de signe.

Pour éclaircir ceci par un exemple, soit proposée l'équation

$$x^3 - 63x + 189 = 0;$$

on trouvera d'abord que les résultats qui répondent à $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, sont $189, 127, 71, 27$, d'où l'on pourra tirer les différences premières -62, -56, -44, les différences deuxièmes 6, 12, et la différence troisième 6; ainsi, on formera les quatre séries suivantes

6	6	6	6	6	6	6...,
6	12	18	24	30	36	42...,
−62	−56	−44	−26	−2	28	64...,
189	127	71	27	1	−1	27...,

dont la loi est que chaque terme est égal à la somme du terme précédent de la même série et de celui qui y est au-dessus dans la série précédente; de sorte qu'il est très-facile de continuer ces séries aussi loin qu'on voudra.

Or, la dernière de ces quatre séries sera, comme on voit, celle des résultats qui viennent de la substitution des nombres naturels $0, 1, 2, \ldots$, à la place de x dans l'équation proposée, et comme les termes de la septième colonne, savoir $6, 42, 64, 27$, sont tous positifs, il s'ensuit que les termes suivants seront tous aussi positifs, de sorte que la série des résultats, continuée aussi loin qu'on voudra, n'aura plus aucune variation de signe.

14. Remarque. — On avait déjà remarqué que l'on pouvait trouver la valeur approchée de toutes les racines réelles et inégales d'une équation quelconque en y substituant successivement, à la place de l'inconnue,

différents nombres en progression arithmétique; mais cette remarque ne pouvait pas être d'une grande utilité, faute d'avoir une méthode pour déterminer la progression qu'on doit employer dans chaque cas, en sorte que l'on soit assuré qu'elle fasse connaître toutes les racines réelles et inégales de l'équation proposée. Nous en sommes heureusement venu à bout à l'aide du Problème du n° 8.

Au reste, nous verrons encore ci-après d'autres usages de ce même Problème par rapport aux racines égales et imaginaires.

§ II. — *De la manière d'avoir les racines égales et imaginaires des équations.*

15. Nous n'avons considéré dans le paragraphe précédent que les racines réelles et inégales de l'équation proposée (B); supposons maintenant que cette équation ait des racines égales; dans ce cas, il faudra (**11**) que l'équation (D) soit divisible autant de fois par v qu'il y aura de combinaisons de racines égales deux à deux; par conséquent, il faudra qu'il y ait dans cette équation (D) autant des derniers termes qui manquent; ainsi, on connaîtra d'abord par ce moyen combien de racines égales il y aura dans la proposée.

Or, puisque dans le cas des racines égales on a nécessairement $u = o$ (8), l'équation (C) du même numéro donnera pour ce cas $Y = o$; ainsi, il faudra que les deux équations en x, $X = o$ et $Y = o$, aient lieu en même temps lorsque x est égal à une quelconque des racines égales de l'équation (B).

On cherchera donc, par les méthodes connues, le plus grand commun diviseur des deux polynômes X et Y, et, faisant ensuite ce diviseur égal égal à zéro, on aura une équation qui ne sera composée que des racines égales de la proposée, mais élevées à une puissance moindre de l'unité.

Soient R le plus grand commun diviseur de X et de Y, et X_1 le quotient de X divisé par R, il est facile de voir que l'équation $X_1 = o$ contiendra toutes les mêmes racines que l'équation proposée $X = o$, avec cette différence que les racines multiples de cette équation seront simples dans l'équation $X_1 = 0$; ainsi, l'équation $X_1 = 0$ sera dans le cas des méthodes précédentes.

On peut encore, si l'on veut, trouver deux équations séparées, dont l'une contienne seulement les racines égales de l'équation $X = 0$, et dont l'autre contienne les racines inégales de la même équation. Pour cela, il n'y aura qu'à chercher encore le plus grand commun diviseur des polynômes X_1 et Y, et, nommant ce diviseur R_1, on prendra le quotient de X_1 divisé par R_1, lequel étant nommé X_2, on fera ces deux équations

$$X_2 = 0 \quad \text{et} \quad R_1 = 0.$$

La première contiendra seulement les racines inégales de l'équation $X = 0$, et la seconde contiendra seulement les racines égales de la même équation, mais chacune une seule fois; de sorte que les deux équations $X_2 = 0$ et $R_1 = 0$ n'auront que des racines inégales, et par conséquent seront susceptibles des méthodes du paragraphe précédent.

16. Connaissant ainsi le nombre des racines réelles tant inégales qu'égales de l'équation proposée, si ce nombre est moindre que le dégré de l'équation, on en conclura que les autres racines sont nécessairement imaginaires.

En général, pour que l'équation (B) ait toutes ses racines réelles, il faut que les valeurs de u soient réelles aussi; donc il faudra que les valeurs de u^2 ou de v soient toutes réelles et positives; par conséquent, l'équation (D) du n° 8 doit avoir toutes ses racines réelles et positives; donc il faudra, par la règle connue, que les signes de cette équation soient alternativement positifs et négatifs; de sorte que, si cette condition n'a pas lieu, ce sera une marque sûre que l'équation (B) a nécessairement des racines imaginaires.

Or, on sait que les racines imaginaires vont toujours en nombre pair, et qu'elles peuvent se mettre deux à deux sous cette forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

α et β étant des quantités réelles; donc on aura

$$u = \pm 2\beta\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$v = -4\beta^2;$$

d'où l'on voit que l'équation (D) aura nécessairement autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, si l'on fait $v = -w$, ce qui changera l'équation (D) en celle-ci

$$(\text{G}) \qquad w^n - a w^{n-1} + b w^{n-2} - c w^{n-3} + \ldots = 0,$$

cette équation aura nécessairement autant de racines réelles positives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans l'équation (B).

Donc, si dans l'équation (G) il n'y a qu'un seul changement de signe, l'équation (B) n'aura que deux racines imaginaires (7).

17. Il suit du numéro précédent que, pour avoir la valeur des racines imaginaires de l'équation (B), il n'y a qu'à chercher les racines réelles positives de l'équation (G). En effet, soient w', w'', w''',... ces racines, on aura d'abord $\frac{\sqrt{w'}}{2}$, $\frac{\sqrt{w''}}{2}$, $\frac{\sqrt{w'''}}{2}$,... pour les valeurs de β; ensuite, pour trouver les valeurs correspondantes de α, on substituera, dans l'équation (B), $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à la place de x, et l'on fera deux équations séparées des termes tous réels et de ceux qui seront multipliés par $\sqrt{-1}$; de cette manière on aura deux équations en α de cette forme

$$(\text{H}) \qquad \begin{cases} \alpha^m + \text{P}\alpha^{m-1} + \text{Q}\alpha^{m-2} + \ldots = 0, \\ m\alpha^{m-1} + p\,\alpha^{m-2} + q\,\alpha^{m-3} + \ldots = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients P, Q,..., p, q,... seront donnés en a, b, c,... et en β.

Donc, si l'on donne à β quelqu'une des valeurs précédentes, il faudra nécessairement que ces deux équations aient lieu en même temps, et par conséquent il faudra qu'elles aient un diviseur commun. On cherchera donc leur plus grand commun diviseur, et, le faisant égal à zéro, on aura une équation en α et β, par laquelle, β étant connu, on trouvera α.

Il est bon de remarquer que si toutes les valeurs de β tirées de l'équation (G) sont inégales entre elles, alors à chaque valeur de β il ne pourra répondre qu'une seule valeur de α; donc, dans ce cas, les deux équations (H) ne pourront avoir qu'une seule racine commune, et par conséquent leur plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

On poussera donc la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve plus qu'à la première dimension, et l'on fera ensuite ce reste égal à zéro, ce qui donnera la valeur cherchée de α.

Mais si, parmi les valeurs de β tirées de l'équation (G), il y en a, par exemple, deux d'égales entre elles, alors, comme à chacune de ces valeurs égales de β il peut répondre des valeurs différentes de α, il faudra qu'en mettant cette valeur double de β dans les équations (H) elles puissent avoir lieu par rapport à l'une et à l'autre des valeurs de α qui y répondent; ainsi, ces deux équations auront nécessairement deux racines communes, et par conséquent leur plus grand commun diviseur sera du second degré. Il faudra donc, dans ce cas, ne pousser la division que jusqu'à ce qu'on arrive à un reste où α se trouve à la seconde dimension seulement, et alors on fera ce reste égal à zéro, ce qui donnera une équation du second degré par laquelle on déterminera les deux valeurs de α, lesquelles seront nécessairement toutes deux réelles.

De même, s'il y avait trois valeurs égales de β, il faudrait, pour trouver les valeurs de α qui répondraient à cette valeur triple de β, ne pousser la division que jusqu'à ce que l'on parvînt à un reste où la plus haute puissance de α fût la troisième; et alors, faisant ce reste égal à zéro, on aurait une équation en α du troisième degré, laquelle donnerait les trois valeurs réelles de α correspondantes à la même valeur de β, et ainsi de suite.

§ III. — *Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques.*

18. Soit l'équation

$$(a) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K = 0,$$

et supposons qu'on ait déjà trouvé par la méthode précédente ou autrement la valeur entière approchée d'une de ses racines réelles et positives; soit cette première valeur p, en sorte que l'on ait

$$x > p \quad \text{et} \quad x < p + 1;$$

on fera

$$x = p + \frac{1}{y},$$

et, substituant cette valeur dans l'équation proposée, à la place de x, on aura, après avoir multiplié toute l'équation par y^m et ordonné les termes par rapport à y, une équation de cette forme

$$(b) \qquad A' y^m + B' y^{m-1} + C' y^{m-2} + \ldots + K' = 0.$$

Or, comme, par hypothèse, $\frac{1}{y} > 0$ et < 1, on aura $y > 0$; donc l'équation (b) aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité.

On cherchera donc par les méthodes du § I la valeur entière approchée de cette racine, et, comme cette racine doit être nécessairement positive, il suffira de considérer y comme positif (4).

Ayant trouvé la valeur entière approchée de y, que je nommerai q, on fera ensuite

$$y = q + \frac{1}{z},$$

et, substituant cette valeur de y dans l'équation (b), on aura une troisième équation en z de cette forme

$$(c) \qquad A'' z^m + B'' z^{m-1} + C'' z^{m-2} + \ldots + K'' = 0,$$

laquelle aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité, dont on pourra trouver de même la valeur entière approchée.

Cette valeur approchée de z étant nommée r, on fera

$$z = r + \frac{1}{u},$$

et substituant on aura une équation en u qui aura au moins une racine réelle plus grande que l'unité, et ainsi de suite.

En continuant de la même manière, on approchera toujours de plus en plus de la valeur de la racine cherchée; mais, s'il arrive que quelqu'un des nombres p, q,... soit une racine exacte, alors on aura $x=p$ ou $y=q$,..., et l'opération sera terminée; ainsi, dans ce cas, on trouvera pour x une valeur commensurable.

Dans tous les autres cas la valeur de la racine sera nécessairement incommensurable, et l'on pourra seulement en approcher aussi près qu'on voudra.

19. Si l'équation proposée a plusieurs racines réelles positives, on pourra trouver, par les méthodes exposées dans le § I, la valeur entière approchée de chacune de ces racines; et nommant ces valeurs $p, p', p'',\ldots$, on les emploiera successivement pour approcher davantage de la vraie valeur de chaque racine; il faudra seulement remarquer :

1° Que si les nombres $p, p', p'',\ldots$ sont tous différents l'un de l'autre, alors les transformées (b), (c),... du numéro précédent n'auront chacune qu'une seule racine réelle et plus grande que l'unité; car si, par exemple, l'équation (b) avait deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que y' et y'', on aurait donc

$$x=p+\frac{1}{y'} \quad \text{et} \quad x=p+\frac{1}{y''},$$

de sorte que ces deux valeurs de x auraient la même valeur entière approchée p contre l'hypothèse; il en serait de même si l'équation (c), ou quelqu'une des suivantes, avait deux racines réelles plus grandes que l'unité.

De là il s'ensuit que, pour trouver dans ce cas les valeurs entières approchées q, r,... des racines des équations (b), (c),..., il suffira de substituer successivement à la place de y, z,... les nombres naturels positifs 1, 2, 3,... jusqu'à ce que l'on trouve deux substitutions consécutives qui donnent des résultats de signe contraire (6);

2° Que s'il y a deux valeurs de x qui aient la même valeur entière approchée p, alors, en employant cette valeur, les équations (b), (c),... auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation dont les deux racines plus grandes que l'unité aient des valeurs entières approchées différentes; alors chacune de ces deux valeurs donnera une suite particulière d'équations dont chacune n'aura plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité.

En effet, puisqu'il y a deux valeurs différentes de x qui ont la même valeur entière approchée p, ces deux valeurs seront représentées par $p+\frac{1}{y}$; de sorte qu'il faudra que y ait nécessairement deux valeurs réelles plus grandes que l'unité; or, si ces deux valeurs de y ont la même valeur approchée q, il faudra de nouveau qu'en faisant $y=q+\frac{1}{z}$, z ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, et ainsi de suite.

Mais, si les valeurs entières approchées de y étaient différentes, alors, nommant ces valeurs q et q', on ferait $y=q+\frac{1}{z}$ et $y=q'+\frac{1}{z}$; et il est clair que z, dans l'une et l'autre de ces deux suppositions, n'aurait plus qu'une seule valeur réelle plus grande que l'unité; autrement les valeurs de y, au lieu d'être seulement doubles, seraient triples ou quadruples, etc.

Donc, quand on sera parvenu à une transformée dont les deux racines plus grandes que l'unité auront des valeurs entières différentes, alors les autres transformées résultantes de chacune de ces deux valeurs n'auront plus qu'une seule racine plus grande que l'unité; par conséquent on pourra trouver la valeur entière approchée de ces racines en y substituant simplement les nombres naturels 1, 2, 3,... jusqu'à ce que l'on ait deux substitutions qui donnent des résultats de signes contraires (6).

On peut faire des remarques analogues sur le cas où il y aurait dans l'équation (a) trois racines ou davantage, qui auraient la même valeur entière approchée.

20. Nous avons supposé (18) que les racines cherchées étaient positives; pour trouver les négatives, il n'y aura qu'à mettre $-x$ à la place de x dans l'équation proposée, et l'on cherchera de même les racines positives de cette dernière équation; ce seront les racines négatives de la proposée (4).

Quant aux racines imaginaires, qui sont toujours exprimées par

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$, nous avons donné, dans le § II, le moyen de trouver les équations dont α et β sont les racines; ainsi il n'y aura qu'à chercher les racines réelles de ces équations, et l'on aura la valeur de toutes les racines imaginaires de l'équation proposée.

21. Pour faciliter les substitutions (**18**) de $p + \frac{1}{y}$ au lieu de x, de $q + \frac{1}{z}$ au lieu de $y, \ldots$, il est bon de remarquer que les coefficients de la transformée (b) peuvent se déduire immédiatement de ceux de l'équation (a) en cette sorte

$$\begin{aligned}
A' &= A p^m + B p^{m-1} + C p^{m-2} + D p^{m-3} + \ldots, \\
B' &= m A p^{m-1} + (m-1) B p^{m-2} + (m-2) C p^{m-3} + \ldots, \\
C' &= \frac{m(m-1)}{2} A p^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} B p^{m-3} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On aura de même ceux de la transformée (c) par ceux de la transformée (b) en mettant dans les formules précédentes q à la place de p, A'', B'', C'',... à la place de A', B', C',..., et A', B', C',... à la place de A, B, C,..., et ainsi de suite.

De là il est évident que le premier coefficient A', ou A'', ou..., ne sera jamais nul, à moins que le nombre p, ou q, ou..., ne soit une racine exacte, auquel cas nous avons vu que la fraction continue se termine à ce nombre (**18**). En effet, si $A' = 0$, ou $A'' = 0$, ou..., on aura $y = \infty$, ou $z = \infty$, ou..., donc $x = p$, ou $y = q$, ou....

22. Soient donc $p, q, r, s, t, \ldots$ les valeurs entières approchées des équations (a), (b), (c),..., en sorte que l'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u}, \ldots,$$

et, substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ddots}}}$$

Ainsi la valeur de x, c'est-à-dire de la racine cherchée, sera exprimée par une fraction continue. Or, on sait que ces sortes de fractions donnent toujours l'expression la plus simple, et en même temps la plus exacte qu'il est possible, d'un nombre quelconque soit rationnel ou irrationnel.

M. Huygens paraît être le premier qui ait remarqué cette propriété des fractions continues, et qui en ait fait usage pour trouver les fractions les plus simples, et en même temps les plus approchantes d'une fraction quelconque donnée (*voyez* son Traité *De Automato planetario*).

Plusieurs habiles Géomètres ont ensuite développé davantage cette théorie, et en ont fait différentes applications ingénieuses et utiles; mais on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à s'en servir dans la résolution des équations.

23. Maintenant, si l'on réduit les fractions continues

$$\frac{p}{1},\quad p+\frac{1}{q},\quad p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}},\ldots$$

en fractions ordinaires, on aura, en faisant

$$\begin{array}{ll}
\alpha = p, & \alpha' = 1,\\
\beta = q\alpha + 1, & \beta' = q\alpha' = q,\\
\gamma = r\beta + \alpha, & \gamma' = r\beta' + \alpha',\\
\delta = s\gamma + \beta, & \delta' = s\gamma' + \beta',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

on aura, dis-je, cette suite de fractions particulières

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \frac{\beta}{\beta'},\quad \frac{\gamma}{\gamma'},\quad \frac{\delta}{\delta'},\ldots,$$

lesquelles seront nécessairement convergentes vers la vraie valeur de x, et dont la première sera plus petite que cette valeur, la seconde sera plus grande, la troisième plus petite, et ainsi de suite; de sorte que la valeur cherchée se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; c'est ce qu'il est aisé de déduire de la nature même de la fraction continue d'où celles-ci sont tirées.

Or, il est facile de voir que les valeurs de

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\quad \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ldots$$

sont toujours telles que

$$\beta\alpha' - \alpha\beta' = 1,\quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = 1,\quad \delta\gamma' - \gamma\delta' = 1,\ldots;$$

d'où il s'ensuit:

1° Que ces fractions sont déjà réduites à leurs moindres termes; car, si γ et γ', par exemple, avaient un commun diviseur autre que l'unité, il faudrait, en vertu de l'équation

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = 1,$$

que l'unité fût aussi divisible par ce même diviseur;

2° Qu'on aura

$$\frac{\beta}{\beta'} - \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'\beta'},\quad \frac{\beta}{\beta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\beta'\gamma'},\quad \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma'\delta'},\ldots,$$

de sorte que les fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'},\quad \frac{\beta}{\beta'},\quad \frac{\gamma}{\gamma'},\ldots$$

ne peuvent jamais différer de la vraie valeur de x que d'une quantité respectivement moindre que

$$\frac{1}{\alpha'\beta'},\quad \frac{1}{\beta'\gamma'},\quad \frac{1}{\gamma'\delta'},\ldots;$$

d'où il sera facile de juger de la quantité de l'approximation.

En général, puisque $\beta' > \alpha'$, $\gamma' > \beta'$,..., on aura

$$\frac{1}{\alpha'^2} > \frac{1}{\alpha'\beta'},\quad \frac{1}{\beta'^2} > \frac{1}{\beta'\gamma'},\ldots,$$

d'où l'on voit que l'erreur de chaque fraction sera toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la même fraction;

3° Que chaque fraction approchera de la valeur de x, non-seulement plus que ne fait aucune des fractions précédentes, mais aussi plus que ne pourrait faire aucune autre fraction quelconque qui aurait un moindre dénominateur. En effet, si la fraction $\frac{\mu}{\mu'}$, par exemple, approchait plus que la fraction $\frac{\delta}{\delta'}$, δ' étant $> \mu'$, il faudrait que la quantité $\frac{\mu}{\mu'}$ se trouvât entre ces deux $\frac{\gamma}{\gamma'}$ et $\frac{\delta}{\delta'}$; donc

$$\frac{\mu}{\mu'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{\delta}{\delta'} - \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{1}{\gamma'\delta'} \quad \text{et} \quad > 0;$$

donc

$$\mu\gamma' - \mu'\gamma < \frac{\mu'}{\delta'} < 1 \quad \text{et} \quad > 0,$$

ce qui ne se peut.

24. Les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \cdots$ peuvent être appelées fractions *principales,* parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur cherchée; mais, quand les nombres $p, q, r, \ldots$ diffèrent de l'unité, on peut encore trouver d'autres fractions convergentes vers la même valeur, et qu'on appellera, si l'on veut, fractions *secondaires.*

Par exemple, si r est > 1, on peut entre les fractions $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$, qui sont toutes deux moindres que la valeur de x, insérer autant de fractions secondaires qu'il y a d'unités dans $r - 1$, en mettant successivement $1, 2, 3, \ldots, r-1$ au lieu de r. De cette manière, à cause de $\gamma = r\beta + \alpha$ et $\gamma' = r\beta' + \alpha'$, on aura cette suite de fractions

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\beta+\alpha}{\beta'+\alpha'}, \quad \frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}, \quad \frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}, \ldots, \quad \frac{r\beta+\alpha}{r\beta'+\alpha'},$$

dont les deux extrêmes sont les deux fractions *principales* $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$, et dont les intermédiaires sont des fractions *secondaires.*

Or, si l'on prend la différence entre deux fractions consécutives quelconques de cette suite, comme entre $\frac{2\beta+\alpha}{2\beta'+\alpha'}$ et $\frac{3\beta+\alpha}{3\beta'+\alpha'}$, on trouvera $\frac{1}{(2\beta'+\alpha')(3\beta'+\alpha')}$, de sorte que cette différence sera toujours positive et ira en diminuant d'une fraction à l'autre; d'où il s'ensuit que, comme