

---

SUR LA RÉOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES (\*).

---

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres  
de Berlin*, t. XXIII, 1769.)

---

Viète est le premier qui ait tâché de donner une méthode générale pour résoudre les équations numériques; mais, quoique cette méthode ait été ensuite perfectionnée et simplifiée à quelques égards par Harriot, Ougtred, Pell, etc., elle est encore si compliquée et si rebutante par le grand nombre d'opérations qu'elle demande, que les Géomètres paraissent l'avoir entièrement abandonnée. Celle que l'on suit communément est due à Newton, et elle est très-facile et très-simple. Il faut supposer seulement qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine qu'on cherche, approchée au moins jusqu'à sa dixième partie près; alors on égale cette valeur, plus une nouvelle inconnue, à celle de l'équation proposée, et, faisant la substitution, on a une seconde équation dont la racine est ce qu'il faudrait ajouter à la première racine approchée pour avoir la racine exacte; mais comme, par l'hypothèse, ce qui reste à ajouter à la première valeur de la racine est moindre qu'un dixième de cette racine, on peut, dans l'équation dont il s'agit, négliger le carré et les puissances plus hautes de l'inconnue; de sorte que, l'équation étant ainsi réduite au premier degré, on aura sur-le-champ la valeur de l'inconnue en déci-

(\*) Lu à l'Académie le 20 avril 1769.

males; cette valeur ne sera qu'approchée, mais on pourra s'en servir pour en trouver une autre plus exacte en faisant sur la seconde équation la même opération que sur la première, et ainsi de suite. De cette manière, on trouve à chaque opération de nouvelles décimales à ajouter ou à retrancher de la valeur de la racine déjà trouvée, et l'on a par conséquent cette racine d'autant plus exactement qu'on pousse le calcul plus loin.

On peut aussi, comme l'a pratiqué Halley, revenir toujours à la première équation proposée, en y substituant à la place de l'inconnue la valeur de la racine de plus en plus approchée et augmentée d'un reste inconnu, ce qui paraît en quelque façon plus simple et plus commode.

Telle est la méthode usitée pour résoudre les équations numériques par approximation. Plusieurs savants Géomètres se sont appliqués à la rendre encore plus exacte et plus facile, soit en ayant égard aux termes où l'inconnue est au second degré, soit en donnant des formules générales à l'aide desquelles on puisse trouver sur-le-champ la valeur de la fraction qui est le reste à ajouter à la racine approchée; mais aucun d'eux ne paraît avoir fait attention aux inconvénients ou plutôt aux imperfections qui se trouvent encore dans cette méthode; du moins personne, que je sache, n'a donné jusqu'à présent les moyens d'y remédier.

La première et la principale de ces imperfections consiste en ce qu'il faut supposer qu'on ait déjà trouvé la valeur de la racine cherchée, approchée jusqu'à sa dixième partie près; car, comme on n'a point encore de règle générale et sûre pour trouver, dans une équation quelconque, la valeur approchée de chacune de ses racines réelles, la méthode dont il s'agit n'est proprement applicable qu'aux cas où l'on connaît d'avance à peu près la valeur de la racine qu'on cherche. Il est vrai que Rolle a donné une méthode, qu'on appelle *des cascades*, pour approcher des racines des équations numériques aussi près que l'on veut; mais cette méthode n'est pas toujours sûre, surtout lorsqu'il y a dans l'équation des racines imaginaires, auquel cas elle laisse toujours en doute si ces racines sont réelles ou non. (*Voyez l'Algèbre de Rolle, chap. III et VI du livre II.*)

Une seconde imperfection regarde la nature même de la méthode par laquelle on approche de la valeur de la racine cherchée; suivant cette méthode, on néglige, à chaque opération, des termes dont on ne connaît pas la valeur; de sorte qu'il est impossible de pouvoir juger de la quantité de l'approximation, et de s'assurer du degré d'exactitude qui doit résulter de chaque correction.

D'ailleurs, ne pourrait-il pas arriver que la série qui donne la racine cherchée fût très-peu convergente, ou même qu'elle devînt divergente après avoir été convergente dans ses premiers termes? Au moins, il n'est pas démontré que cela ne puisse jamais avoir lieu dans la méthode dont nous parlons.

Enfin, quand même la série serait toujours convergente, il est clair qu'elle ne donnerait jamais qu'une valeur approchée de la racine dans le cas même où elle serait égale à un nombre commensurable. Il est vrai que l'on a des méthodes particulières pour trouver les racines commensurables; mais c'est toujours une grande imperfection de la méthode dont il s'agit de ne pas donner la valeur exacte de ces racines.

§ I. — *Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entière la plus approchée de chacune de ses racines réelles.*

1. THORÈME I. — *Si l'on a une équation quelconque, et que l'on trouve deux nombres tels, qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue de cette équation, ils donnent deux résultats de signe contraire, l'équation aura nécessairement au moins une racine réelle dont la valeur sera entre ces deux nombres.*

Ce théorème est connu depuis longtemps, et l'on a coutume de le démontrer par la théorie des lignes courbes; mais on peut aussi le démontrer directement par la théorie des équations, en cette sorte. Soient  $x$  l'inconnue de l'équation, et  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , ses racines; l'équation se réduira,

comme on sait, à cette forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots = 0.$$

Or, soient  $p$  et  $q$  les nombres qui, substitués par  $x$ , donneront des résultats de signe contraire, il faudra donc que ces deux quantités

$$(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma) \dots,$$

$$(q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma) \dots,$$

soient de signes différents; par conséquent, il faudra qu'il y ait au moins deux facteurs correspondants comme  $p - \alpha$  et  $q - \alpha$ , qui soient de signes contraires; donc il y aura au moins une des racines de l'équation, comme  $\alpha$ , qui sera entre les nombres  $p$  et  $q$ , c'est-à-dire plus petite que le plus grand de ces deux nombres, et plus grande que le plus petit d'entre eux; donc cette racine sera nécessairement réelle.

2. COROLLAIRE I. — Donc, si les nombres  $p$  et  $q$  ne diffèrent l'un de l'autre que de l'unité ou d'une quantité moindre que l'unité, le plus petit de ces nombres, s'il est entier, ou le nombre entier qui sera immédiatement moindre que le plus petit de ces deux nombres, s'il n'est pas entier, sera la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation. Si la différence entre  $p$  et  $q$  est plus grande que l'unité, alors, nommant  $n, n + 1, n + 2, \dots$ , les nombres entiers qui tombent entre  $p$  et  $q$ , il est clair que si l'on substitue successivement, à la place de l'inconnue, les nombres

$$p, n, n + 1, n + 2, \dots, q,$$

on trouvera nécessairement deux substitutions consécutives qui donneront des résultats de signes différents; donc, puisque les nombres qui donneront ces deux résultats ne diffèrent entre eux que de l'unité, on trouvera, comme ci-dessus, la valeur entière la plus approchée d'une des racines de l'équation.

3. COROLLAIRE II. — Toute équation dont le dernier terme est négatif, en supposant le premier positif, a nécessairement une racine réelle

positive, dont on pourra trouver la valeur entière la plus approchée en substituant, à la place de l'inconnue, les nombres 0, 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce que l'on rencontre deux substitutions qui donnent des résultats de signe contraire.

Car, en supposant le premier terme  $x^m$ , et le dernier  $-H$  ( $H$  étant un nombre positif), on aura, en faisant  $x = 0$ , le résultat négatif  $-H$ , et en faisant  $x = \infty$ , le résultat positif  $\infty^m$ ; donc on aura ici  $p = 0$  et  $q = \infty$ , donc les nombres entiers intermédiaires seront tous les nombres naturels 1, 2, 3, ...; donc, etc. (Corollaire précédent).

De là on voit :

1° Que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement une racine réelle positive;

2° Que toute équation d'un degré impair, dont le dernier terme est positif, a nécessairement une racine réelle négative; car, en changeant  $x$  en  $-x$ , le premier terme de l'équation deviendra négatif; donc, changeant tous les signes pour rendre de nouveau le premier terme positif, le dernier deviendra négatif; donc l'équation aura alors une racine réelle positive; par conséquent, l'équation primitive aura une racine réelle négative;

3° Que toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative; car premièrement elle aura une racine réelle positive; ensuite, comme en changeant  $x$  en  $-x$  le premier terme demeure positif, la transformée aura aussi une racine réelle positive; donc l'équation primitive en aura une réelle et négative.

4. REMARQUE. — Comme on peut toujours changer les racines négatives d'une équation quelconque en positives en changeant seulement le signe de l'inconnue, nous ne considérerons dans la suite, pour plus de simplicité, que les racines positives; ainsi, quand il s'agira d'examiner les racines d'une équation donnée, on considérera d'abord les racines positives de cette équation, ensuite on y changera les signes de tous les termes où l'inconnue se trouvera élevée à une puissance impaire, et l'on

considérera de même les racines positives de cette nouvelle équation; ces racines prises en moins seront les racines négatives de la proposée.

5. THÉORÈME II. — *Si, dans une équation quelconque qui ait une ou plusieurs racines réelles et inégales, on substitue successivement à la place de l'inconnue deux nombres dont l'un soit plus grand et dont l'autre soit plus petit que l'une de ces racines, et qui diffèrent en même temps l'un de l'autre d'une quantité moindre que la différence entre cette racine et chacune des autres racines réelles de l'équation, ces deux substitutions donneront nécessairement deux résultats de signes contraires.*

En effet, soient  $\alpha$  une des racines réelles et inégales de l'équation, et  $\beta, \gamma, \delta, \dots$  les autres racines quelconques; soit de plus  $\rho$  la plus petite des différences entre la racine  $\alpha$  et chacune des autres racines réelles de l'équation: il est clair qu'en prenant  $p > \alpha$ ,  $q < \alpha$  et  $p - q < \rho$ , les quantités  $p - \alpha, q - \alpha$  seront de signes contraires, et que les quantités  $p - \beta, p - \gamma, \dots$  seront chacune de même signe que sa correspondante  $q - \beta, q - \gamma, \dots$ ; car, si  $p - \beta$  et  $q - \beta$  étaient de signes contraires, il faudrait que  $\beta$  fût aussi compris entre  $p$  et  $q$ , ce qui ne se peut. Donc les deux quantités

$$\begin{aligned} & (p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma) \dots, \\ & (q - \alpha)(q - \beta)(q - \gamma) \dots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire les résultats des substitutions de  $p$  et  $q$  à la place de l'inconnue  $x$  (1), seront nécessairement de signes contraires.

6. COROLLAIRE I. — *Donc, si dans une équation quelconque on substitue successivement à la place de l'inconnue les nombres en progression arithmétique*

$$(A) \quad 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta, \dots,$$

les résultats correspondants formeront une suite dans laquelle il y aura autant de variations de signes que l'équation proposée aura de racines réelles positives et inégales, mais dont les différences ne soient pas

moindres que la différence  $\Delta$  de la progression. De sorte que, si l'on prend  $\Delta$  égale ou moindre que la plus petite des différences entre les différentes racines positives et inégales de l'équation, la suite dont il s'agit aura nécessairement autant de variations de signe que l'équation contiendra de racines réelles positives et inégales.

Donc, si la différence  $\Delta$  est en même temps égale ou moindre que l'unité, on trouvera aussi par ce moyen la valeur entière approchée de chacune des racines réelles positives et inégales de l'équation (2).

Si l'équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle et positive, ou si elle en a plusieurs, mais dont les différences ne soient pas moindres que l'unité, il est clair qu'on pourra faire  $\Delta = 1$ , c'est-à-dire qu'on pourra prendre les nombres naturels 0, 1, 2, 3, ..., pour les substituer à la place de l'inconnue; mais, s'il y a dans l'équation des racines inégales dont les différences soient moindres que l'unité, alors il faudra prendre  $\Delta$  moindre que l'unité et telle qu'elle soit égale ou moindre que la plus petite des différences entre les racines dont il s'agit; ainsi, la difficulté se réduit à trouver la valeur qu'on doit donner à  $\Delta$ , en sorte qu'on soit assuré qu'elle ne surpasse pas la plus petite des différences entre les racines positives et inégales de l'équation proposée. C'est l'objet du Problème suivant.

7. COROLLAIRE II. — Toute équation qui n'a qu'un seul changement de signe ne peut avoir qu'une seule racine réelle positive.

Il est d'abord clair que l'équation aura nécessairement une racine réelle positive, à cause que son dernier terme sera de signe différent du premier (3).

Or, soient (en supposant le premier terme positif comme à l'ordinaire) X la somme de tous les termes positifs de l'équation, et Y la somme de tous les négatifs, en sorte que l'équation soit  $X - Y = 0$ ; et, puisqu'il n'y a par l'hypothèse qu'un seul changement de signe, il est clair que les puissances de l'inconnue  $x$  du polynôme X seront toutes plus hautes que celles du polynôme Y; de sorte que, si  $x^r$  est la plus petite puissance de  $x$  dans le polynôme X, et qu'on divise les deux polynômes X et Y

par  $x^r$ , la quantité  $\frac{X}{x^r}$  ne contiendra que des puissances positives de  $x$ , et la quantité  $\frac{Y}{x^r}$  ne contiendra que des puissances négatives de  $x$ ; d'où il s'ensuit que,  $x$  croissant, la valeur de  $\frac{X}{x^r}$  devra croître aussi, et,  $x$  diminuant,  $\frac{X}{x^r}$  diminuera aussi, à moins que le polynôme  $X$  ne contienne que le seul terme  $x^r$ , auquel cas  $\frac{X}{x^r}$  sera toujours une quantité constante; au contraire,  $x$  croissant, la valeur de  $\frac{Y}{x^r}$  diminuera nécessairement, et,  $x$  diminuant,  $\frac{Y}{x^r}$  ira en augmentant. Or, soit  $a$  la racine réelle et positive de l'équation, on aura donc, lorsque  $x = a$ ,  $X = Y$ ; donc aussi  $\frac{X}{x^r} = \frac{Y}{x^r}$ ; donc, en substituant au lieu de  $x$  des nombres quelconques plus grands que  $a$ , on aura toujours  $\frac{X}{x^r} > \frac{Y}{x^r}$ , et par conséquent  $X - Y$  égal à un nombre positif; et, en substituant au lieu de  $x$  des nombres moindres que  $a$ , on aura toujours  $\frac{X}{x^r} < \frac{Y}{x^r}$ , et par conséquent  $X - Y$  égal à un nombre négatif; donc il sera impossible que l'équation ait des racines réelles positives plus grandes ou plus petites que  $a$ .

8. PROBLÈME. — *Une équation quelconque étant donnée, trouver une autre équation dont les racines soient les différences entre les racines de l'équation donnée.*

Soit donnée l'équation

$$(B) \quad x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots = 0.$$

On sait que  $x$  peut être indifféremment égal à une quelconque de ses racines; or, soit  $x_1$  une autre racine quelconque de la même équation, en sorte que l'on ait aussi

$$x_1^m - Ax_1^{m-1} + Bx_1^{m-2} - Cx_1^{m-3} + \dots = 0,$$

et soit  $u$  la différence entre les deux racines  $x$  et  $x_1$ , de manière que l'on



ait  $x_1 = x + u$ ; substituant cette valeur de  $x$ , dans la dernière équation, et ordonnant les termes par rapport à  $u$ , on aura une équation en  $u$  du même degré  $m$ , laquelle, en commençant par les derniers termes, sera de cette forme

$$X + Y u + Z u^2 + V u^3 + \dots + u^m = 0,$$

les coefficients  $X, Y, Z, \dots$  étant des fonctions de  $x$  telles que

$$\begin{aligned} X &= x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - C x^{m-3} + \dots, \\ Y &= m x^{m-1} - (m-1) A x^{m-2} + (m-2) B x^{m-3} - \dots, \\ Z &= \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} A x^{m-3} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$Y = \frac{dX}{dx}, \quad Z = \frac{1}{2} \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad V = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 X}{dx^3}, \dots$$

Donc, puisque par l'équation donnée (B) on a  $X = 0$ , l'équation précédente étant divisée par  $u$  deviendra celle-ci

$$(C) \quad Y + Z u + V u^2 + \dots + u^{m-1} = 0.$$

Cette équation, si l'on y substitue pour  $x$  une quelconque des racines de l'équation (B), aura pour racines les différences entre cette racine et toutes les autres de la même équation (B); donc, si l'on combine les équations (B) et (C) en éliminant  $x$ , on aura une équation en  $u$  dont les racines seront les différences entre chacune des racines de l'équation (B) et toutes les autres racines de la même équation; ce sera l'équation cherchée.

Mais, sans exécuter cette élimination qui serait souvent fort laborieuse, il suffira de considérer :

1° Que  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  étant les racines de l'équation en  $x$ , celles de l'équation en  $u$  seront

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \dots, \quad \beta - \alpha, \quad \beta - \gamma, \dots, \quad \gamma - \alpha, \quad \gamma - \beta, \dots,$$

d'où l'on voit que ces racines seront au nombre de  $m(m-1)$ , et que de

plus elles seront égales deux à deux, et de signes contraires; de sorte que l'équation en  $u$  manquera nécessairement de toutes les puissances impaires de  $u$ . Donc, en faisant  $\frac{m(m-1)}{2} = n$  et  $u^2 = v$ , l'équation dont il s'agit sera de cette forme

$$(D) \quad v^n - av^{n-1} + bv^{n-2} - cv^{n-3} + \dots = 0;$$

2° Que  $(\alpha - \beta)^2, (\alpha - \gamma)^2, (\beta - \gamma)^2, \dots$  étant les différentes valeurs de  $v$  dans l'équation (D), le coefficient  $a$  sera égal à leur somme, le coefficient  $b$  à la somme de tous leurs produits deux à deux, etc. Or il est facile de voir que

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \dots &= (m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots) \\ &\quad - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \dots); \end{aligned}$$

mais on sait que

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \dots = B,$$

donc on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots = A^2 - 2B;$$

savoir

$$a = (m-1)(A^2 - 2B) - 2B,$$

$$a = (m-1)A^2 - 2mB;$$

et l'on pourra de la même manière trouver la valeur des autres coefficients  $b, c, \dots$

Pour y parvenir plus facilement, supposons

$$A_1 = \alpha + \beta + \gamma + \dots,$$

$$A_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots,$$

$$A_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \dots,$$

$$\dots\dots\dots,$$

et l'on aura, comme on sait,

$$A_1 = A,$$

$$A_2 = AA_1 - 2B,$$

$$A_3 = AA_2 - BA_1 + 3C,$$

$$A_4 = AA_3 - BA_2 + CA_1 - 4D,$$

$$\dots\dots\dots$$

Supposons de plus

$$\begin{aligned} a_1 &= (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + \dots, \\ a_2 &= (\alpha - \beta)^4 + (\alpha - \gamma)^4 + (\beta - \gamma)^4 + \dots, \\ a_3 &= (\alpha - \beta)^6 + (\alpha - \gamma)^6 + (\beta - \gamma)^6 + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} a_1 &= (m-1)A_2 - 2\left(\frac{A_1^2 - A_2}{2}\right), \\ a_2 &= (m-1)A_4 - 4(A_1A_3 - A_4) + 6\left(\frac{A_2^2 - A_4}{2}\right), \\ a_3 &= (m-1)A_6 - 6(A_1A_5 - A_6) + 15(A_2A_4 - A_6) - 20\left(\frac{A_3^2 - A_6}{2}\right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} a_1 &= mA_2 - 2\frac{A_1^2}{2}, \\ a_2 &= mA_4 - 4A_1A_3 + 6\frac{A_2^2}{2}, \\ a_3 &= mA_6 - 6A_1A_5 + 15A_2A_4 - 20\frac{A_3^2}{2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et en général

$$\begin{aligned} a_\mu &= mA_{2\mu} - 2\mu A_1A_{2\mu-1} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{2}A_2A_{2\mu-2} - \dots \\ &\pm \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\dots(\mu+1)}{1.2.3\dots\mu} \frac{A_\mu^2}{2}. \end{aligned}$$

Les quantités  $a_1, a_2, a_3, \dots$  étant ainsi connues, on aura sur-le-champ les valeurs des coefficients  $a, b, c, \dots$  de l'équation (D) par les formules

$$\begin{aligned} a &= a_1, \\ b &= \frac{aa_1 - a_2}{2}, \\ c &= \frac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3}, \\ d &= \frac{ca_1 - ba_2 + aa_3 - a_4}{4}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ainsi l'on pourra déterminer directement les coefficients  $a, b, c, \dots$  de

l'équation (C) par ceux de l'équation donnée (B). Pour cela on cherchera d'abord par les formules ci-dessus les valeurs des quantités  $A_1, A_2, A_3, \dots$  jusqu'à  $A_{2n}$ ; ensuite, à l'aide de celles-ci, on cherchera celles des quantités  $a_1, a_2, a_3, \dots$  jusqu'à  $a_n$ , et enfin par ces dernières on trouvera les valeurs cherchées des coefficients  $a, b, c, \dots$

9. REMARQUE. — Il est bon de remarquer que l'équation (D) exprime également les différences entre les racines positives et négatives de l'équation (B), de sorte que la même équation aura lieu aussi lorsqu'on changera  $x$  en  $-x$  pour avoir les racines négatives (4).

De plus il est clair que l'équation (D) sera toujours la même, soit qu'on augmente ou qu'on diminue toutes les racines de l'équation proposée d'une même quantité quelconque; donc, si cette équation a son second terme, on pourra le faire disparaître, et cherchant ensuite l'équation en  $v$  qui en résultera, on aura la même équation qu'on aurait eue si l'on n'avait pas fait évanouir le second terme; mais l'évanouissement de ce terme rendra toujours la recherche des coefficients  $a, b, c, \dots$  un peu plus facile, parce qu'on aura  $A = 0$ , et par conséquent aussi  $A_1 = 0$ , de sorte que les formules du numéro précédent deviendront

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = -2B,$$

$$A_3 = 3C,$$

$$A_4 = -BA_2 - 4D,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a_1 = mA_2,$$

$$a_2 = mA_4 + 6 \frac{A_2^2}{2},$$

$$a_3 = mA_6 + 15A_2A_4 - 20 \frac{A_2^3}{2},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a = a_1,$$

$$b = \frac{aa_1 - a_2}{2},$$

$$c = \frac{ba_1 - aa_2 + a_3}{3},$$

$$\dots\dots\dots$$

10. COROLLAIRE I. — Puisque les racines de l'équation (D) sont les carrés des différences entre les racines de l'équation proposée (B), il est clair que si cette équation (D) avait tous ses termes de même signe, auquel cas elle n'aurait aucune racine réelle et positive, il est clair, dis-je, que, dans ce cas, les différences entre les racines de l'équation (B) seraient toutes imaginaires; de sorte que cette équation ne pourrait avoir qu'une seule racine réelle, ou bien plusieurs racines réelles et égales entre elles; si ce dernier cas a lieu, on le reconnaîtra et on le résoudra par les méthodes connues (*voyez* aussi plus bas le § II); à l'égard du premier cas, il s'ensuit du n° 6 qu'on pourra prendre  $\Delta = 1$ .

11. COROLLAIRE II. — Si l'équation (B) a un ou plusieurs couples de racines égales, il est clair que l'équation (D) aura une ou plusieurs valeurs de  $v$  égales à zéro, de sorte qu'elle sera alors divisible une ou plusieurs fois par  $v$ ; cette division faite, lorsqu'elle a lieu, soit l'équation restante disposée à rebours de cette manière

$$(E) \quad 1 + \alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \dots + \omega v^r = 0,$$

$r$  étant  $=$  ou  $< n$ ; qu'on fasse  $v = \frac{1}{y}$ , et ordonnant l'équation par rapport à  $y$ , on aura

$$(F) \quad y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \dots + \omega = 0.$$

Qu'on cherche par les méthodes connues la limite des racines positives de cette équation, et soit  $l$  cette limite, en sorte que  $l$  surpasse chacune des valeurs positives de  $y$ ; donc  $\frac{1}{l}$  sera moindre que chacune des valeurs positives de  $\frac{1}{y}$  ou de  $v$ , et par conséquent moindre que chacune des valeurs de  $u^2$ , à cause de  $v = u^2$  (Problème précédent).

Donc  $\frac{1}{\sqrt{l}}$  sera nécessairement moindre qu'aucune des valeurs de  $u$ , c'est-à-dire qu'aucune des différences entre les racines réelles et inégales de l'équation proposée (B).

Donc :

1° Si  $\sqrt{l} < 1$ , alors on sera sûr que l'équation (B) n'aura point de racines réelles dont les différences soient moindres que l'unité; ainsi dans ce cas on pourra faire sans scrupule  $\Delta = 1$  (6);

2° Mais si  $\sqrt{l} =$  ou  $> 1$ , alors il peut se faire qu'il y ait dans l'équation (B) des racines dont les différences soient moindres que l'unité; mais, comme la plus petite de ces différences sera toujours nécessairement plus grande que  $\frac{1}{\sqrt{l}}$ , on pourra toujours prendre  $\Delta$  égal ou  $< \frac{1}{\sqrt{l}}$  (numéro cité).

En général, soit  $k$  le nombre entier qui est égal ou immédiatement plus grand que  $\sqrt{l}$ , et l'on pourra toujours prendre  $\Delta = \frac{1}{k}$ .

12. SCOLIE I. — Quant à la manière de trouver la limite des racines d'une équation, la plus commode et la plus exacte est celle de Newton; laquelle consiste à trouver un nombre dont les racines de l'équation proposée étant diminuées, l'équation résultante n'ait aucune variation de signe; car alors cette équation ne pourra avoir que des racines négatives; par conséquent le nombre dont les racines de la proposée auront été diminuées surpassera nécessairement la plus grande de ces racines.

Ainsi, pour chercher la limite  $l$  des racines de l'équation

$$(F) \quad y^r + \alpha y^{r-1} + \beta y^{r-2} + \gamma y^{r-3} + \dots + \varpi = 0,$$

on y mettra  $y + l$  au lieu de  $y$ , et ordonnant l'équation résultante par rapport à  $y$ , elle deviendra

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \dots + y^r = 0,$$

dans laquelle

$$P = l^r + \alpha l^{r-1} + \beta l^{r-2} + \gamma l^{r-3} + \dots + \varpi,$$

$$Q = r l^{r-1} + (r-1) \alpha l^{r-2} + (r-2) \beta l^{r-3} + \dots,$$

$$R = \frac{r(r-1)}{2} l^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} \alpha l^{r-3} + \dots,$$

$$S = \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} l^{r-3} + \dots,$$

.....

et il n'y aura qu'à chercher une valeur de  $l$  qui, étant substituée dans les quantités  $P, Q, R, \dots$ , les rende toutes positives; en commençant par la dernière de ces quantités, laquelle n'aura que deux termes, et remontant successivement aux quantités précédentes, on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour  $l$ , et qui sera la limite la plus proche cherchée.

Si l'on voulait éviter tout tâtonnement, il n'y aurait qu'à prendre pour  $l$  le plus grand coefficient des termes négatifs de l'équation (F) augmenté d'une unité; car il est facile de prouver qu'en donnant à  $l$  cette valeur, les quantités  $P, Q, R, \dots$  seront toujours positives.

Cette manière d'avoir la limite des racines d'une équation quelconque est due, je crois, à Maclaurin; mais en voici une autre qui donnera le plus souvent des limites plus approchées.

Soient

$$- \mu y^{r-m} - \nu y^{r-n} - \omega y^{r-p} - \dots,$$

les termes négatifs de l'équation (F); on prendra pour  $l$  la somme des deux plus grandes des quantités

$$\sqrt[m]{\mu}, \sqrt[n]{\nu}, \sqrt[p]{\omega}, \dots,$$

ou un nombre quelconque plus grand que cette somme. Cette proposition peut se démontrer de la même manière que la précédente; ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Au reste, il faut observer que les limites trouvées de l'une ou de l'autre de ces deux manières seront rarement les plus prochaines limites; pour en avoir de plus petites on essaiera successivement pour  $l$  des nombres moindres, et l'on prendra le plus petit de ceux qui satisferont aux conditions que  $P, Q, R, \dots$  soient des nombres positifs.

13. SCOLIE II. — Ayant donc trouvé la limite  $l$  des racines de l'équation (F), et pris  $k$  égal ou immédiatement plus grand que  $\sqrt{l}$ , on fera  $\Delta = \frac{1}{k}$  (10), et l'on substituera successivement dans l'équation proposée,