ŒUVRES

DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXVII

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LES LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES MATHÉMATIQUES,

données à l'École Normale, en 1795, par J.-L. LAGRANGE.

pondent aux huit solutions dont le Problème est susceptible, et, lorsqu'on n'a aucune donnée particulière par laquelle on puisse déterminer laquelle de ces solutions convient au cas proposé, il est indispensable de les chercher toutes, en employant pour chacune des huit combinaisons une courbe particulière des erreurs. Mais, si l'on sait, par exemple, que la distance de l'observateur au second objet est plus grande ou plus petite que sa distance au premier, il ne faudra prendre alors dans la ligne PB que le point B dans le premier cas, ou le point B' dans le second, ce qui diminuera les huit combinaisons de moitié. Si l'on avait la même donnée sur le troisième objet, relativement au second, et sur le premier, relativement au troisième, alors les points C et D seraient déterminés, et l'on n'aurait qu'une solution unique.

Ces deux Exemples peuvent suffire pour montrer l'usage de la méthode de ces courbes dans la résolution des Problèmes; mais cette méthode, que nous n'avons présentée que d'une manière pour ainsi dire mécanique, peut aussi être soumise à l'Analyse.

En effet, tout se réduit à décrire ou faire passer une courbe par plusieurs points, soit que ces points soient donnés par le calcul ou par une construction, ou même par des observations ou des expériences isolées et indépendantes les unes des autres. Ce Problème est, à la vérité, indéterminé; car on peut, à la rigueur, faire passer par des points donnés une infinité de courbes différentes, régulières ou irrégulières, c'est-à-dire soumises à des équations, ou tracées arbitrairement à la main; mais il ne s'agit pas de trouver des solutions quelconques, mais les plus simples et les plus aisées à employer.

Ainsi, s'il n'y avait que deux points donnés, la solution la plus simple serait une ligne droite qu'on mènerait par ces points. S'il y a trois points, on pourrait faire passer par ces points un arc de cercle, qui est, après la droite, la ligne la plus facile à décrire.

Mais, si le cercle est la courbe la plus simple par sa description, elle ne l'est pas par son équation entre les abscisses et les ordonnées rectangles. Sous ce dernier point de vue, on peut regarder comme les plus simples les courbes dont l'ordonnée est exprimée par une fonction entière et rationnelle de l'abscisse, telle que

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

y étant l'ordonnée et x l'abscisse. Ces sortes de courbes s'appellent en général *paraboliques*, parce qu'on peut les regarder comme une généralisation de la parabole, qui a lieu lorsque l'équation n'a que les trois premiers termes. Nous en avons déjà montré l'usage dans la résolution des équations; mais leur considération est toujours utile dans la description approchée des courbes; car on peut toujours faire passer une courbe de ce genre par tant de points qu'on voudra d'une courbe proposée, puisqu'il n'y a qu'à prendre autant de coefficients indéterminés $a, b, c, \ldots$ qu'il y a de points proposés, et déterminer ces coefficients de manière que les abscisses et les ordonnées, pour ces points, soient données. Or il est clair que, quelle que puisse être la courbe proposée, la courbe parabolique ainsi tracée en différera toujours d'autant moins que le nombre des points donnés sera plus grand, et leur distance moindre.

Newton est le premier qui se soit proposé ce Problème; voici la solution qu'il en donne :

Soient P, Q, R, S, ... les valeurs des ordonnées y qui répondent aux valeurs $p, q, r, s, \ldots$ des abscisses x; on aura les équations suivantes

$$\begin{aligned}
P &= a + bp + cp^2 + dp^3 + \ldots,\\
Q &= a + bq + cq^2 + dq^3 + \ldots,\\
R &= a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

le nombre de ces équations devant être égal à celui des coefficients indéterminés $a, b, c, \ldots$. Soustrayant ces équations l'une de l'autre, les restes seront divisibles par $q - p$, $r - q, \ldots$, et l'on aura, après la division,

$$\begin{aligned}
\frac{Q-P}{q-p} &= b + c(q+p) + d(q^2 + qp + p^2) + \ldots,\\
\frac{R-Q}{r-q} &= b + c(r+q) + d(r^2 + rq + q^2) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{Q-P}{q-p}=Q_1,\quad \frac{R-Q}{r-q}=R_1,\quad \frac{S-R}{s-r}=S_1,\quad \ldots;$$

on trouvera de la même manière, par la soustraction et la division,

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p}=c+d(r+q+p)+\ldots,$$
$$\frac{S_1-R_1}{s-q}=c+d(s+r+q)+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit de même

$$\frac{R_1-Q_1}{r-p}=R_2,\quad \frac{S_1-R_1}{s-q}=S_2,\quad \ldots;$$

on trouvera

$$\frac{S_2-R_2}{s-r}=d+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite.

On trouve, de cette manière, les valeurs des coefficients a, b, c, ..., à commencer par les dernières, et, les substituant dans l'équation générale

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$

il viendra, après les réductions, cette formule, qu'il est aisé de continuer aussi loin qu'on voudra,

$$y=P+Q_1(x-p)+R_2(x-p)(x-q)+S_3(x-p)(x-q)(x-r)+\ldots.$$

Mais on peut réduire cette solution à une plus grande simplicité par la considération suivante.

Puisque y doit devenir P, Q, R,..., lorsque x devient p, q, r,..., il est aisé de voir que l'expression de y sera de cette forme

$$y=AP+BQ+CR+DS+\ldots,$$

où les quantités A, B, C,... doivent être exprimées en x, de manière qu'en faisant $x = p$ on ait

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots;$$

que de même, en faisant $x = q$, on ait

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad \ldots;$$

qu'en faisant $x = r$, on ait pareillement

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad \ldots, \quad \text{etc.};$$

d'où il est facile de conclure que les valeurs de A, B, C, ... doivent être de cette forme

$$A = \frac{(x-q)(x-r)(x-s)\ldots}{(p-q)(p-r)(p-s)\ldots},$$

$$B = \frac{(x-p)(x-r)(x-s)\ldots}{(q-p)(q-r)(q-s)\ldots},$$

$$C = \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\ldots}{(r-p)(r-q)(r-s)\ldots},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en prenant autant de facteurs, dans les numérateurs et dans les dénominateurs, qu'il y aura de points donnés de la courbe, moins un.

Cette dernière expression de y, quoique sous une forme différente, revient cependant au même, comme on peut s'en assurer par le calcul, en développant les valeurs des quantités Q_1, R_2, S_3, ..., et ordonnant les termes suivant les quantités P, Q, R, ...; mais elle est préférable par la simplicité de l'Analyse sur laquelle elle est fondée, et par sa forme même, qui est beaucoup plus commode pour le calcul.

On pourra donc, par cette formule, qu'il ne serait pas difficile de réduire à une construction géométrique, trouver la valeur de l'ordonnée y pour une abscisse quelconque x, d'après les ordonnées connues P, Q, R, ... pour les abscisses données p, q, r, ... Ainsi, ayant plusieurs termes d'une série quelconque, on pourra trouver tel terme intermédiaire qu'on voudra, ce qui est fort utile pour remplir les lacunes qui pourraient se trouver dans des suites d'observations ou d'expériences, ou dans des Tables calculées par des formules ou des constructions données.

Si maintenant on applique cette théorie aux deux Exemples proposés ci-dessus et aux Exemples semblables, dans lesquels on a les erreurs qui répondent à différentes suppositions, on pourra trouver directement l'erreur y qui répondra à une supposition quelconque intermédiaire x, en prenant les quantités P, Q, R,... pour les erreurs trouvées, et p, q, r,... pour les suppositions d'où elles résultent. Mais, dans ces Exemples, la question étant de trouver, non pas l'erreur qui répond à une supposition donnée, mais la supposition dont l'erreur serait nulle, il est clair que cette question est l'inverse de la précédente, et qu'elle peut se résoudre aussi par la même formule, en prenant réciproquement les quantités p, q, r,... pour les erreurs, et les quantités P, Q, R,... pour les suppositions correspondantes : alors x sera l'erreur de la supposition y; par conséquent, en faisant $x = 0$, la valeur de y sera celle de la supposition dont l'erreur sera nulle.

Soient donc P, Q, R,... les valeurs de l'inconnue dans les différentes suppositions, et p, q, r,... les erreurs qui résultent de ces suppositions, en donnant à ces quantités les signes convenables; alors on aura pour la valeur de l'inconnue dont l'erreur sera nulle l'expression

$$\mathrm{AP} + \mathrm{BQ} + \mathrm{CR} + \ldots,$$

dans laquelle les valeurs de A, B, C,... seront

$$\mathrm{A} = \frac{q}{q-p} \times \frac{r}{r-p} \times \ldots,$$

$$\mathrm{B} = \frac{p}{p-q} \times \frac{r}{r-q} \times \ldots,$$

$$\mathrm{C} = \frac{p}{p-r} \times \frac{q}{q-r} \times \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en prenant autant de facteurs qu'il y aura de suppositions, moins un.