EXEMPLE XIII.

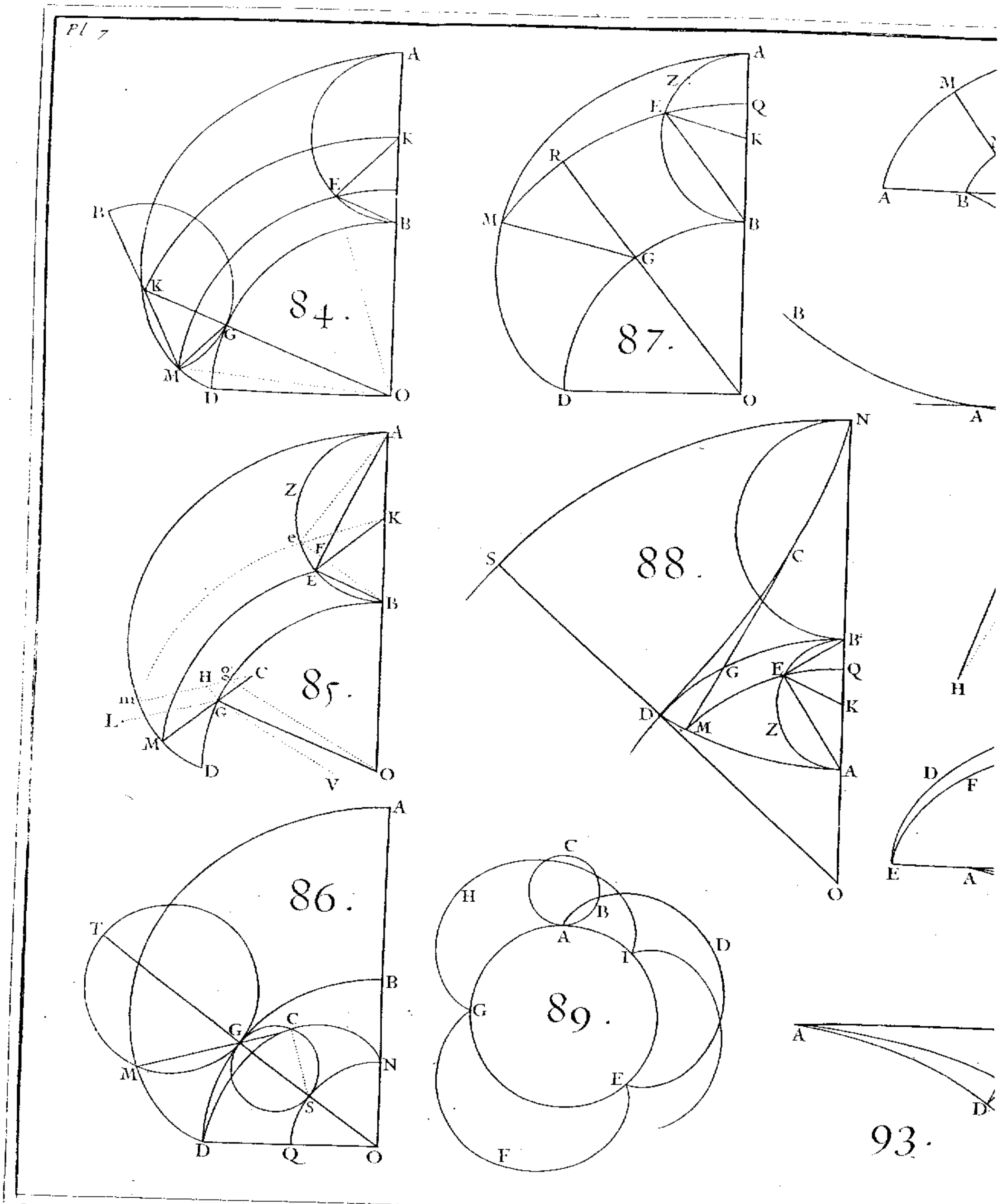
61. L'élévation du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuſcule. FIG. 45.

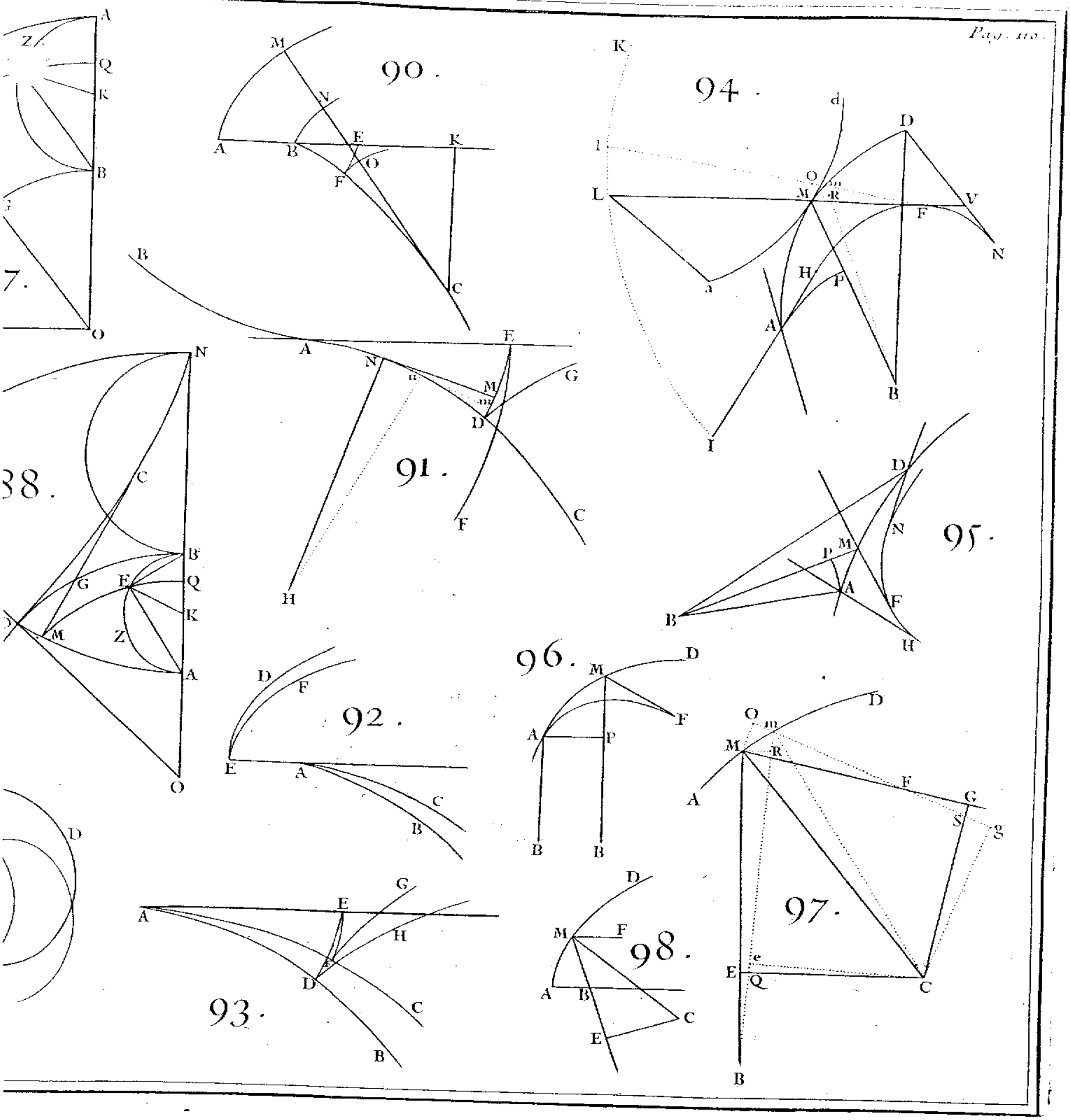
Soit C le centre de la ſphere, $APTOBHQ$ le méridien; $HDdO$ l'horiſon; $QEeT$ le cercle crépuſculaire parallele à l'horiſon; $AMNB$ l'équateur; $FEDG$ la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horiſon & du cercle crépuſculaire; P le pole auſtral; PEM, PDN des quarts de cercle de déclinaiſon. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horiſon & le cercle crépuſculaire, & l'arc OP de l'élévation du pole ſont donnés, & par conſéquent leurs ſinus droits CI ou FL ou QX, & OV. L'on cherche le ſinus CK de l'arc EM ou DN de la déclinaiſon du Soleil lorſqu'il décrit le parallele ED.

S'imaginant une autre portion $fedg$ d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de $FEDG$, avec les quarts de cercles Pem, Pdn; il eſt clair que le temps que le Soleil emploie à parcourir l'arc ED, devant être un *moindre*, la différence de l'arc MN qui en eſt la meſure, & qui devient mn lorſque ED devient ed, doit être nulle; d'où il ſuit que les petits arcs Mm, Nn, & par conſéquent les petits arcs Re, Sd ſeront égaux entre eux. Or les arcs RE, SD étant renfermés entre les mêmes paralleles ED, ed, ſont auſſi égaux, & les angles en S & en R ſont droits. Donc les petits triangles rectangles ERe, DSd, que l'on conſidère comme rectilignes * à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés, ſeront égaux & ſemblables; & par conſéquent les hypothénuſes Ee, Dd ſeront auſſi égales entre elles. * *Art.* 3.

Cela poſé, les droites DG, EF, dg, ef communes ſections des plans $FEDG$, $fedg$ paralleles à l'équateur, avec l'horiſon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diametres HO, QT, puiſque les plans de tous ces cercles ſont perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien; & les petites droites Gg, Ff ſeront égales entre elles, puiſque les droites FG, fg ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50 que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre ; ce qui donne ici (à cauſe des cercles HDO, QET) $CO . CG :: Dd$ ou $Ee . DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ . IF :: CO + IQ$ ou $OX . CG + IF$ ou GL. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on aura $CO . CG :: OV . GK$. Et $GK . GL :: CK . FL$ ou QX. Donc $OV . CK :: OX . XQ :: XQ . XH$ par la propriété du cercle : c'eſt-à dire que ſi l'on prend QX pour le rayon ou ſinus total dans le triangle rectangle QXH, dont l'angle HQX eſt de 9 degrés, parceque les Aſtronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élévation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le temps du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élévation du pole ; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.

On pourra conſulter ſur ce problême l'Aſtronomie ſphérique de M. Mauduit, page 62 & ſuivantes.


Pl 7
84.
87.
85.
88.
86.
89.
93.



7.
88.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.

tes prises ensemble ne composent qu'une seule courbe *ADEFGHI*, &c. Or les rayons des cercles générateurs étant incommensurables, leurs circonférences le seront aussi; & par conséquent le point décrivant *A* du cercle mobile *ABC* ne pourra jamais retomber dans le point *A* de l'immobile, d'où il étoit parti, si grand que puisse être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe *ADEFGHI*, &c. Maintenant si l'on mene au travers du cercle immobile une ligne droite indéfinie, il est clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géométrique doit avoir au moins autant de dimensions que cette ligne peut être coupée en de différents points par une droite; il s'ensuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimensions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou transcendante.

PROPOSITION III.

Problême.

107. *La ligne courbe* BFC *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle soit la développée commune.* FIG. 90.

Si l'on développe la courbe *BFC* en commençant par le point *A*, il est clair que tous les points *A*, *B*, *F* du fil *ABFC* décriront dans ce mouvement des lignes courbes *AM*, *BN*, *FO* qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée *BFC*. Mais il faut observer que la ligne *FO* n'ayant pour développée que la partie *FC*, son origine n'est pas en *F*; & que pour la trouver, il faut développer la partie restante *BF* en commençant au point *F* pour décrire la portion *EF* de la courbe *EFO* dont l'origine est en *E*, & qui a pour développée la courbe entiere *BFC*.

Si l'on veut trouver les points M, N, O ſans ſe ſervir du fil $ABFC$, il n'y a qu'à prendre ſur une tangente quelconque CM autre que BA, les parties CM, CN, CO égales à $ABFC$, BFC, FC.

COROLLAIRE.

108. Il eſt évident, 1°. Que les courbes AM, BN, EFO ſont d'une nature très différente entre elles ; puiſque la courbe AM a dans ſon ſommet A le rayon de ſa développée égal à AB, au lieu que celui de la courbe BN eſt nul. Il eſt viſible auſſi par la figure même de la courbe EFO qu'elle eſt très différente des courbes AM, BN.

2°. Que les courbes AM, BN, EFO ne ſont géométriques que lorſque la donnée BFC eſt géométrique & de plus rectifiable. Car ſi elle n'eſt pas géométrique, en prenant BK, pour la coupée, on ne trouvera point géométriquement l'appliquée KC : & ſi elle n'eſt pas rectifiable, ayant mené la tangente CM, on ne pourra déterminer géométriquement les points M, N, O des courbes AM, BN, EFO ; puiſqu'on ne peut trouver géométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe BFC, & à ſes portions BF, FC.

REMARQUE.

FIG. 91. 109. Si l'on développe une ligne courbe BAC qui ait un point d'inflexion en A, en commençant par le point D autre que le point d'inflexion ; on formera par le développement de la partie BAD la partie DEF ; & par celui de la partie DC, la partie reſtante DG : de ſorte que $FEDG$ ſera la courbe entiere formée par le développement de BAC. Or il eſt viſible que cette courbe rebrouſſe chemin aux points D & E, avec cette différence qu'au point de rebrouſſement D les parties DE, DG ont leur convexité oppoſée l'une à l'autre ; au lieu qu'au point E les parties DE, EF ſont concaves vers le même côté. On a enſeigné dans la ſection précédente à trouver les points de rebrouſſement tels que D : il eſt queſtion maintenant de déterminer les points E,

qu'on peut appeller points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte, & que perſonne, que je ſache, n'a encore conſidéré.

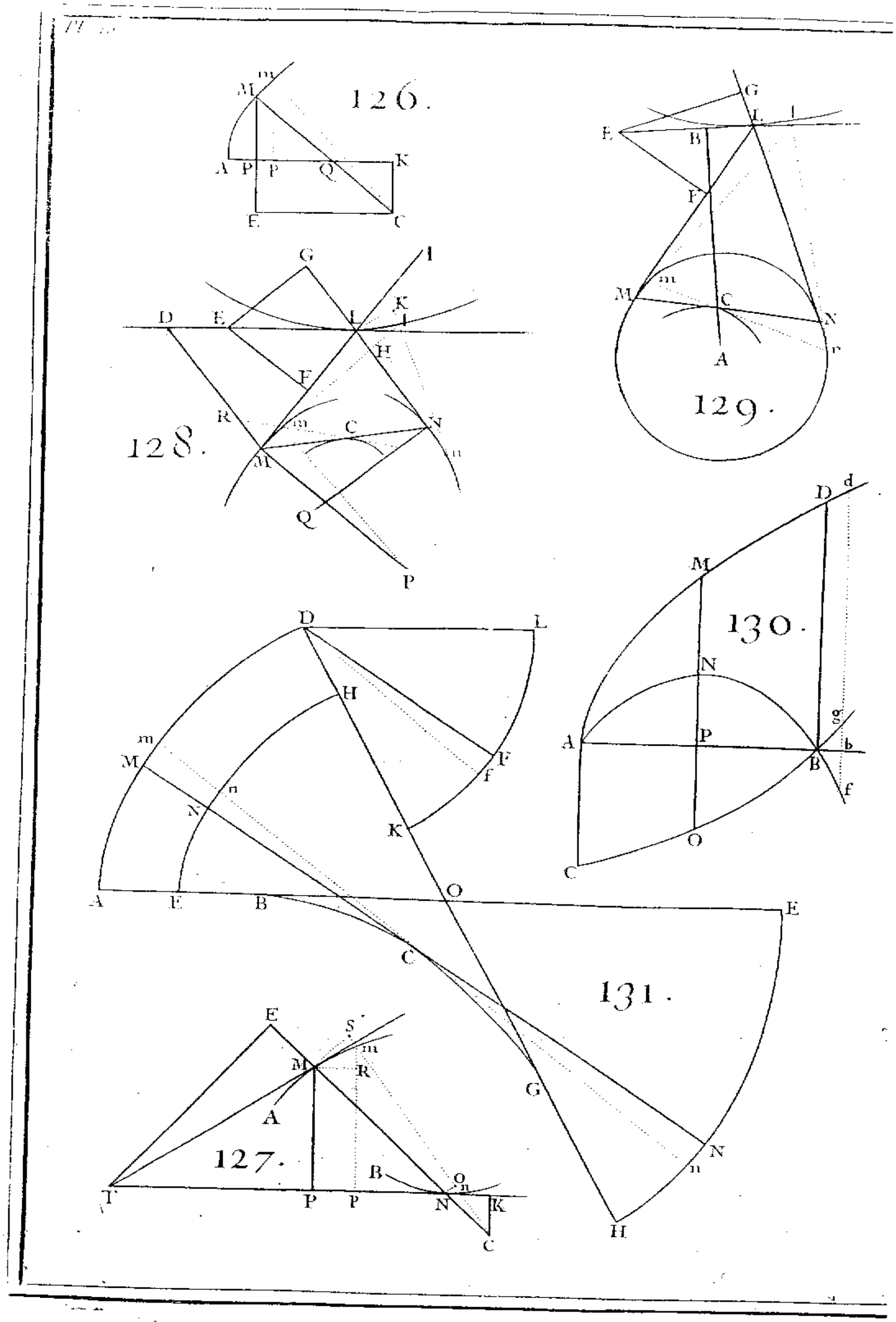
Pour en venir à bout, on menera à diſcrétion ſur la partie DE deux perpendiculaires MN, mn, terminées par la développée aux points N, n, par leſquels on tirera deux autres perpendiculaires NH, nH ſur les premieres NM, nm; ce qui formera deux petits ſecteurs MNm, NHn qui ſeront ſemblables, puiſque les angles MNm, NHn ſont égaux. On aura donc $Nn . Mm :: NH . NM$. Or dans le point d'inflexion A le rayon NH devient * infini ou zéro; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. * *Art.* 81.
Il faut donc qu'au point de rebrouſſement E de la ſeconde ſorte, la raiſon de la différence Nn du rayon MN de la développée, à la différence Mm de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant puiſque * * *Art.* 86.

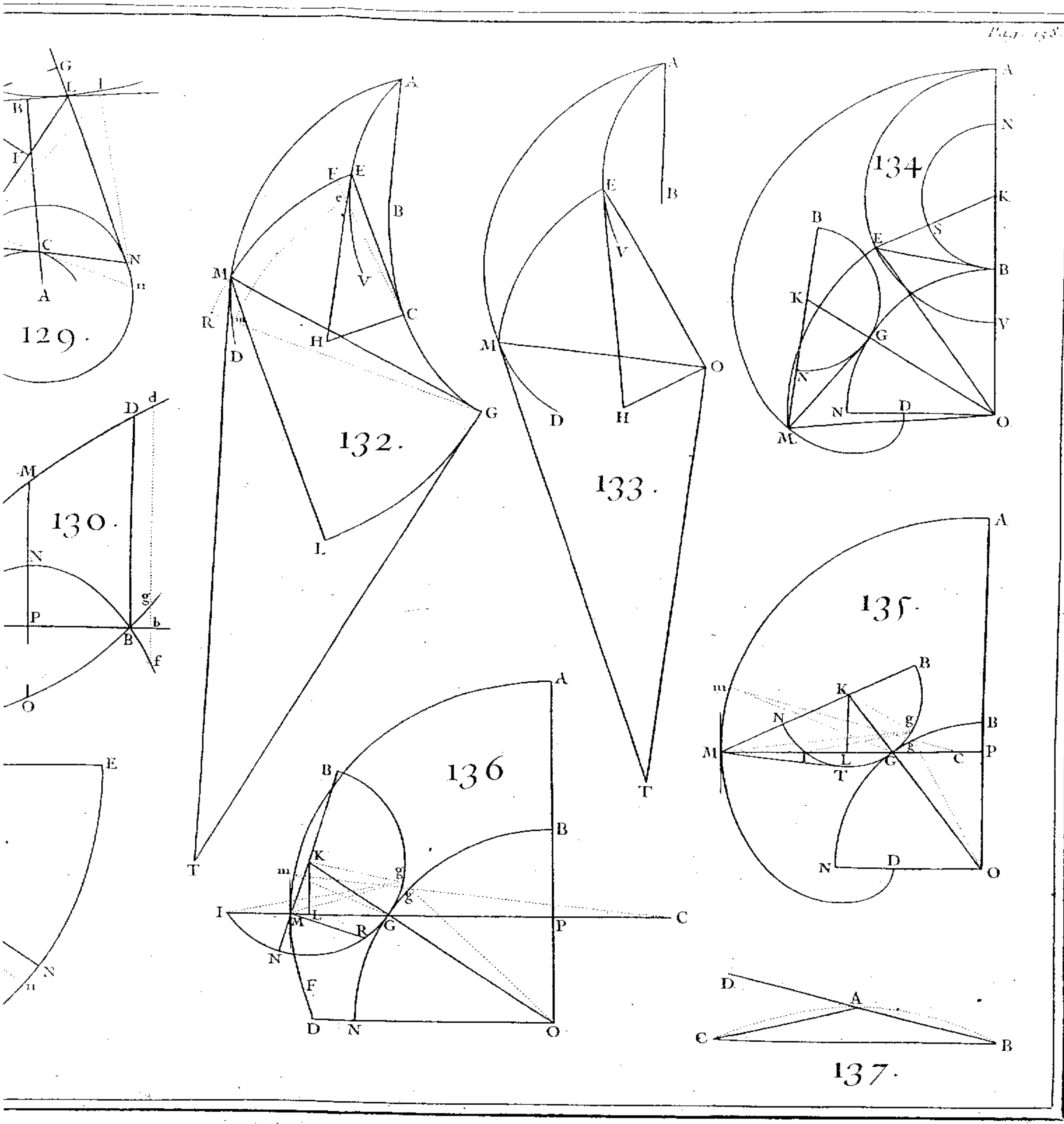
$$Nn = \frac{-3\,dx\,dy\,ddy^2\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx\,dddy\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}, \text{ \& } Mm$$

$= \sqrt{dx^2+dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2\,dddy + dy^2\,dddy - 3\,dy\,ddy^2}{dx\,ddy^2} = 0$ ou ∞; & multipliant par $dx\,ddy^2$, on trouvera la formule $dx^2\,dddy + dy^2\,dddy - 3\,dy\,ddy^2 = 0$ ou ∞, qui ſervira à déterminer les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte.

On peut encore concevoir qu'une rebrouſſante DEF ou $HDEFG$ de la ſeconde ſorte, ait pour développée une autre rebrouſſante BAC de la ſeconde ſorte, telle que ſon point de rebrouſſement A réponde au point de rebrouſſement E, c'eſt-à-dire qu'il ſoit ſitué ſur le rayon de la développée qui part du point E. Or il eſt clair, dans cette ſuppoſition, que le rayon EA de la développée ſera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la différence de FIG. 92. 93.

$\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$ expreſſion générale * des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E; ce qui donne la même formule qu'auparavant: de ſorte qu'elle eſt générale pour trouver les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte. * *Art.* 78.


126.
127.
128.
129.
130.
131.


129.
130.
132.
133.
134.
135.
136
137.

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problême.

FIG. 130. 163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zéro lorſque* x = a, *c'eſt-à-dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entendues deux lignes courbes ANB, COB, qui aient pour axe commun la ligne AB, & qui ſoient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de ſorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il eſt clair que ces deux courbes ſe rencontreront au point B; puiſque par la ſuppoſition PN & PO deviennent chacune zéro lorſque le point P tombe en B. Cela poſé, ſi l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD, & qui rencontre les lignes courbes ANB, COB aux points

* *Art.* 2. f, g; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne différe pas de BD. Il n'eſt donc queſtion que de trouver le rapport de bg à bf. Or il eſt viſible que la coupée AP devenant AB, les appliquées PN, PO deviennent nulles; & que AP devenant Ab, elles deviennent bf, bg. D'où il ſuit que ces appliquées, elles-mêmes bf, bg, ſont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB, COB; & partant que ſi l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la

divisée par la différence du dénominateur, après avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I.

164. Soit $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zéro. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est-à-dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. Soit $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aax^2 + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$, & substituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

NOTE VII.

La théorie que notre Auteur indique dans ce problême est assez importante pour que nous croyons devoir la traiter avec plus de détail. Mais il faut reprendre les choses d'un peu plus haut.

1. On demande de mener une tangente sur la courbe représentée par l'équation $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$, du point où

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR L'INTELLIGENCE
DES LIGNES COURBES.

PAR M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL.

NOUVELLE ÉDITION,

Revue & augmentée par M. LE FEVRE.

Prix 12 liv. relié.

A PARIS,

Chez ALEX. JOMBERT, jeune, Libraire pour le Génie & l'Artillerie, rue Dauphine, près du Pont Neuf.

M. DCC. LXXXI.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.