SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

Fig. 2. Si l'on prolonge un des petits côtés Mm du poligone qui compose * une ligne courbe ; ce petit côté, ainsi prolongé, sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou m.

* *Art.* 3.

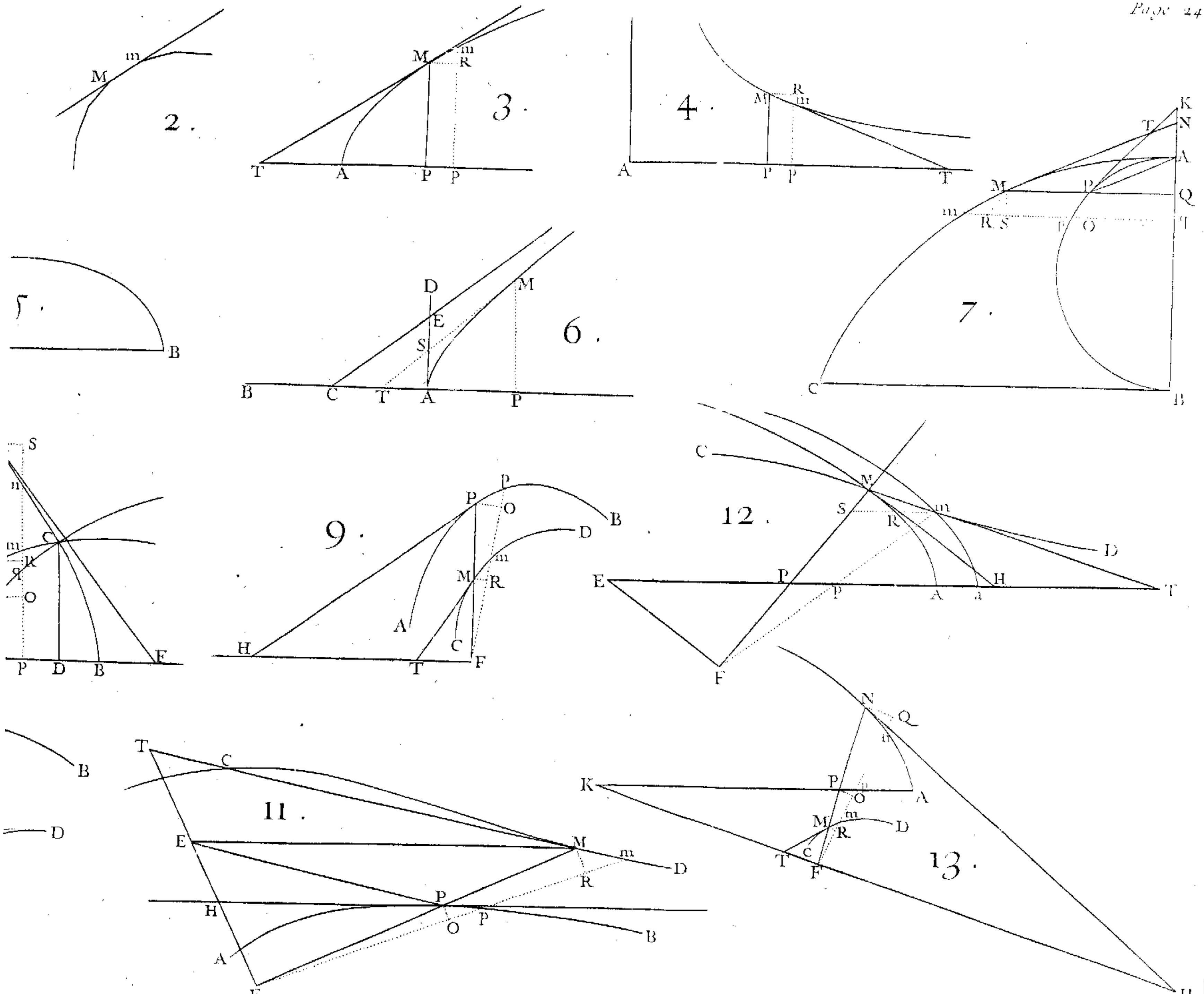
PROPOSITION I.

Problême.

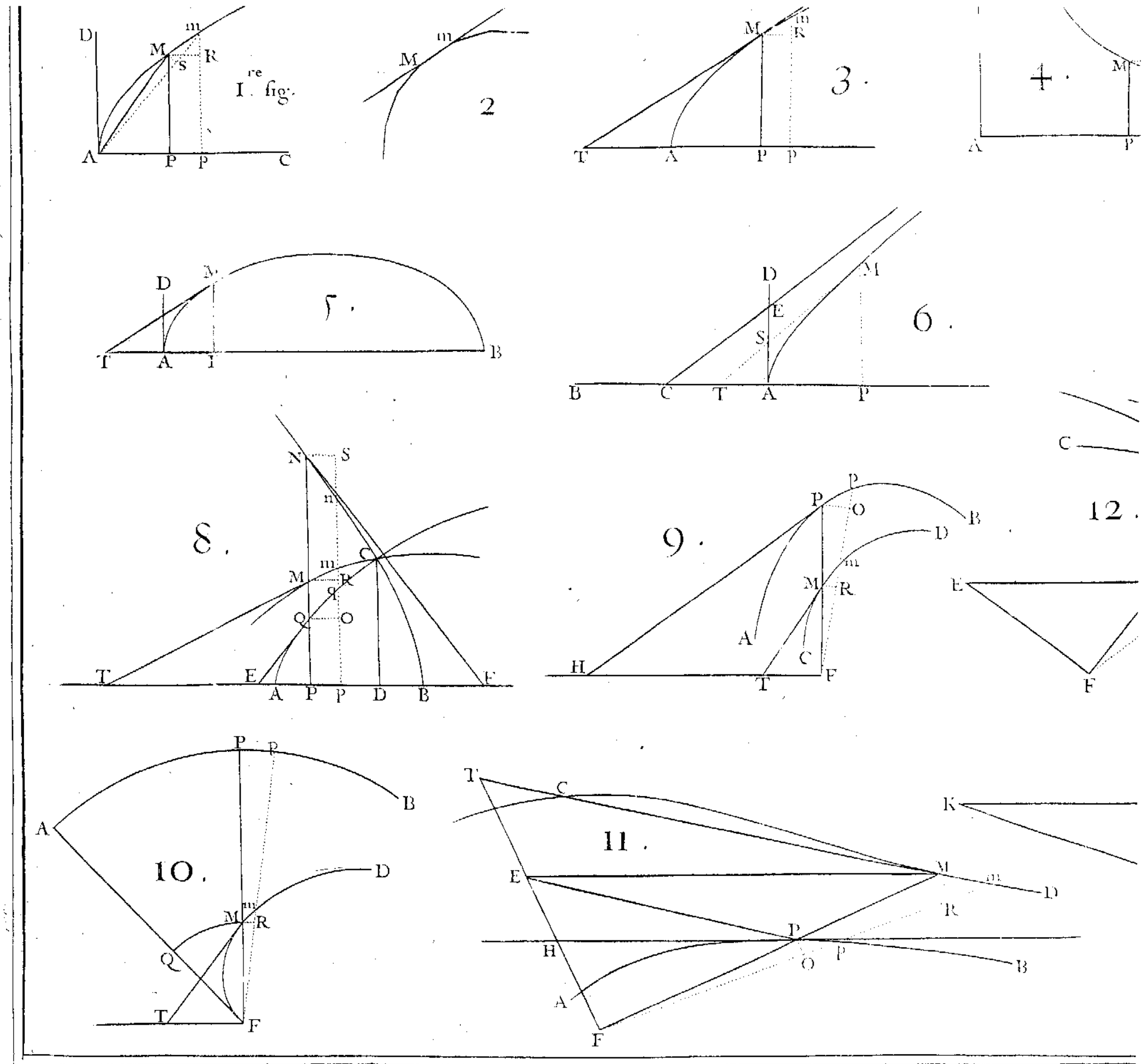
Fig. 3. 9. *Soit une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diametre au point T, soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x; PM, y; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy) . RM\,(dx) :: MP\,(y) . PT = \frac{y\,dx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y, & divisée par dy, donnera une valeur de la soustangente PT en termes entiérement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

REMARQUE.



Gravé par Berey



1re fig.
2
3
4
5
6
8
9
10
11
12

REMARQUE.

10. Lorſque le point T tombe du côté oppoſé au point A origine des x, il eſt clair que x croiſſant, y diminue, & qu'il faut changer par conſéquent * dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative ; & partant auſſi celle de $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)$. Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embarraſſer, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a preſcrites * ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de IT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les exemples ſuivants.

EXEMPLE I.

11. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour parametre la droite donnée a, & l'on aura, en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura, en prenant les différences, $xdy + ydx = 0$, & partant $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marprenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx+2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times a - x}{3a-3x-2x}$ ou $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a-5x}$.

Et généralement ſi l'on veut que m marque l'expoſant de la puiſſance de AP, & n celui de la puiſſance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ qui eſt une équation générale pour toutes les ellipſes à l'infini, dont la différence eſt $\frac{\overline{m+n}\,.\,ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\,.\,\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ la valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$) $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}\,.\,x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n\,.\,\overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n}\,.\,x \times \overline{a-x}}{m\,.\,\overline{a-x} - nx}$, ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma-mx-nx}$, & $AT = \frac{nax}{ma-mx-nx}$.

EXEMPLE III.

13. Les mêmes choſes étant poſées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on ſuppoſe ici que le point B tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles conſidérées par rapport à leurs diametres. D'ou l'on tirera comme ci-deſſus $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma+\overline{m+n}\,.\,x}$ & $AT \frac{nax}{ma+\overline{m+n}\,.\,x}$.

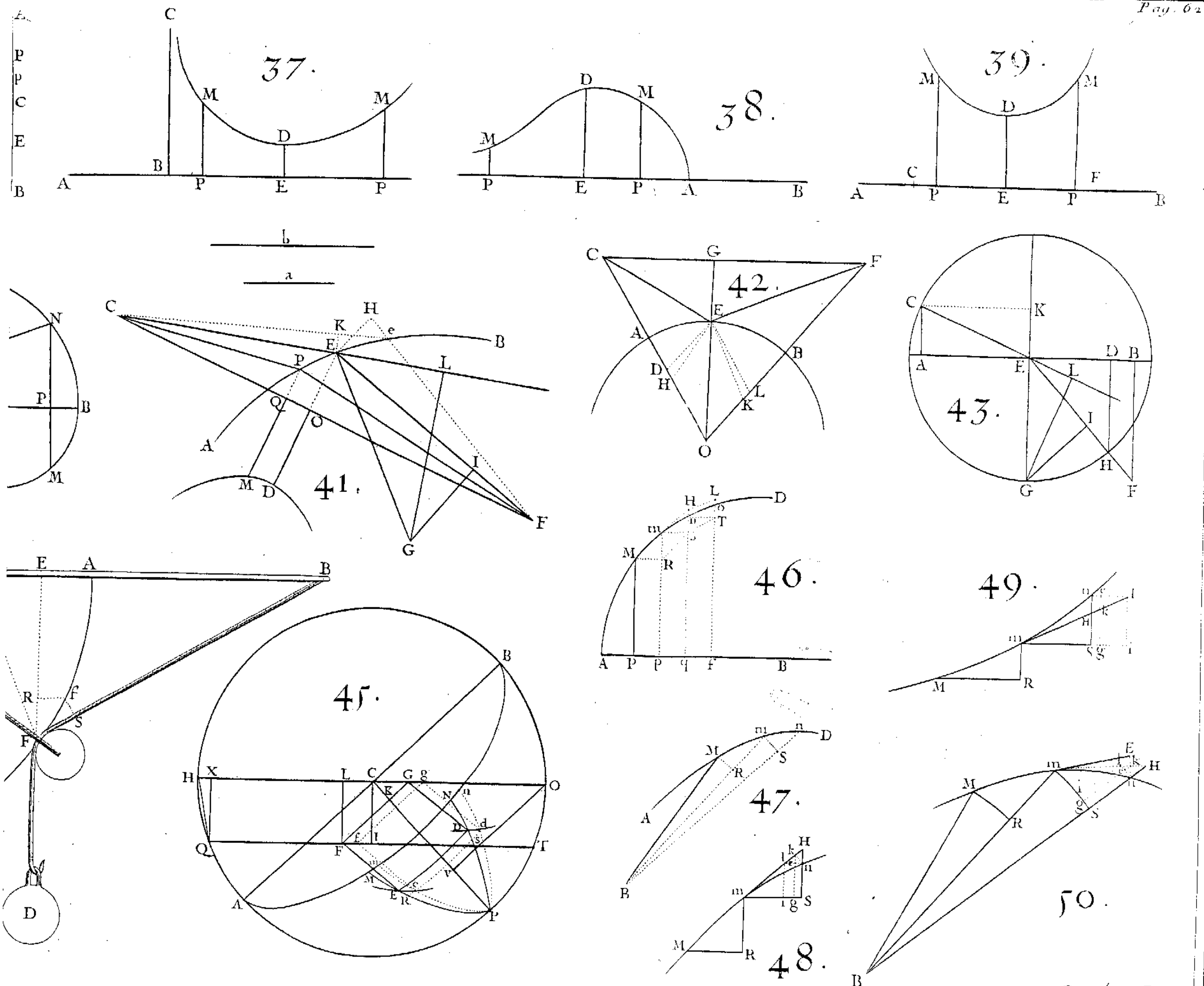
Maintenant ſi l'on ſuppoſe que AP ſoit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une diſtance infinie, c'eſt-à-dire qu'elle en deviendra l'aſymptote CE; & l'on aura en ce cas $AT\left(\frac{nax}{ma+\overline{m+n}.x}\right) = \frac{n}{m+n}a = AC$; puiſque a étant infiniment moindre que x, le terme ma ſera nul par rapport à $\overline{m+n}.x$. Par la même raiſon en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainſi en faiſant pour abréger $m+n=p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la différence eſt $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de ſorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'aſymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx.dy$, ou $\sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}::AC.\left(\frac{n}{p}a\right).AE = \frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les valeurs de CA & de AE étant ainſi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui ſera l'aſymptote cherchée.

Si $m=1$ & $n=1$, la courbe ſera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC=\frac{1}{2}a$, & $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'eſt-à-dire à la moitié du diametre conjugué, ce que l'on ſait d'ailleurs être conforme à la vérité.

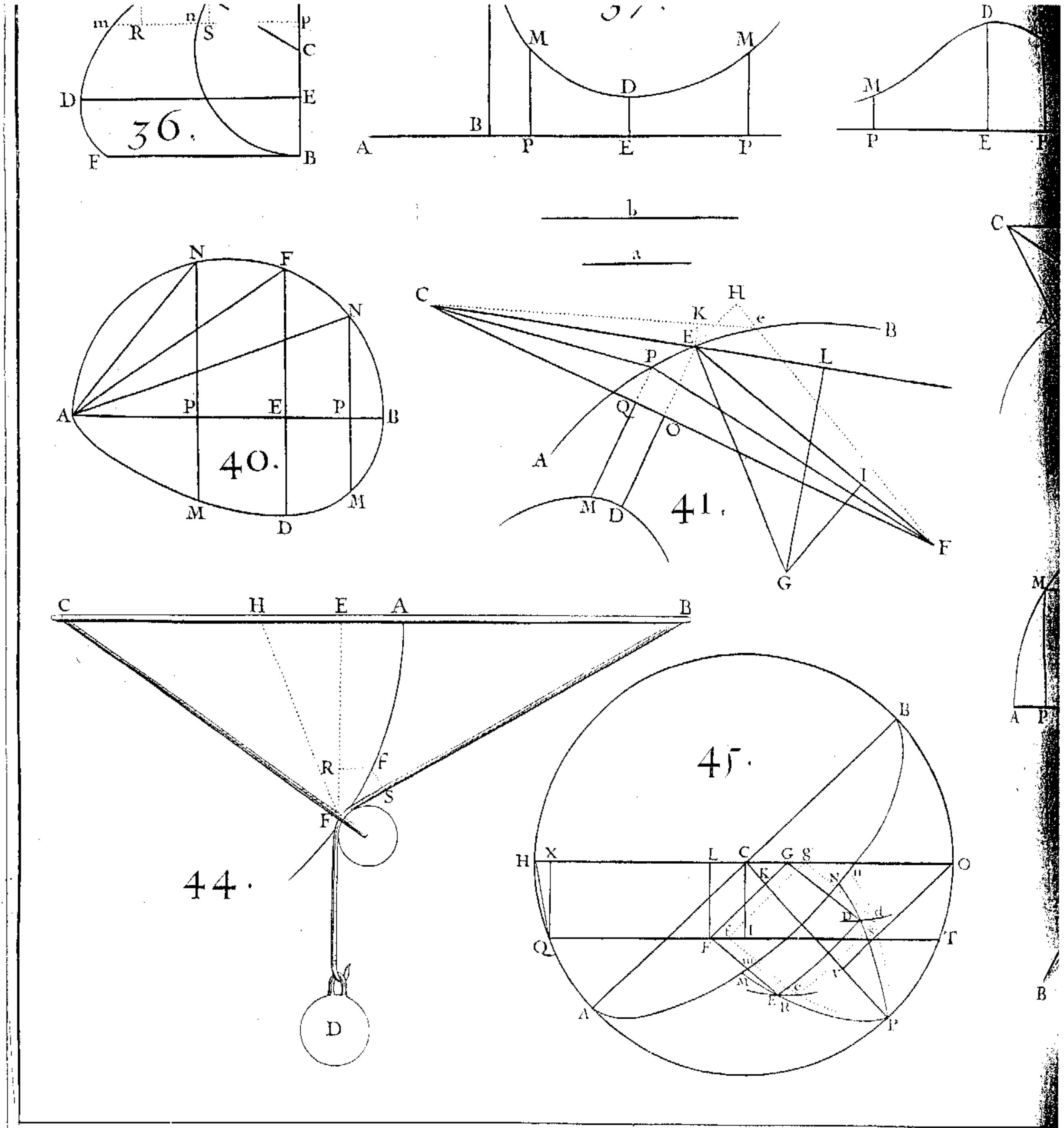
EXEMPLE IV.

Fig. 6. 14. Soit l'équation $y^3-x^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, a eſt une ligne droite donnée) & que cette équation exprime la nature de la courbe AM, ſa différence ſera $3yydy-3xxdx=axdy+aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy}=\frac{3y^3-axy}{3xx+ay}$, & $AT\left(\frac{ydx}{dy}-x\right)=\frac{3y^3-3x^3-2axy}{3xx+ay}=\frac{axy}{3xx+ay}$ en mettant pour $3y^3-3x^3$ ſa valeur $3axy$.

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que AP & PM ſoient cha-



Gravé par Berey


36.
40.
41.
44.
45.

Soit $au+bz$ la quantité donnée; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à EC & à EF, la poſition de cette derniere ſera toujours la même, puiſqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par conſéquent ne change point. Si $a=b$, il eſt clair que la poſition de EF doit être ſur CE prolongée du côté de E; puiſque $GL = GI$, lorſque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB: mais lorſqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG. FIG. 42.

EXEMPLE. X.

58. Le cercle AEB étant donné de poſition avec les points C, F hors de ce cercle; trouver ſur ſa circonférence le point E tel que la ſomme des droites CE, EF ſoit la moindre qu'il eſt poſſible. FIG. 42.

Suppoſant que le point E ſoit celui que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG, il eſt clair qu'elle ſera perpendiculaire ſur la circonférence AEB; & partant * que les angles FEG, CEG ſeront égaux entre eux. Si donc l'on mene EH enſorte que l'angle EHO ſoit égal à l'angle CEO, & de même EK, enſorte que l'angle EKO ſoit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC; on formera les triangles ſemblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a; OC, b; OF, c; & les inconnues OD ou LE, x; DE ou OL, y; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$ & $HD\left(x - \frac{aa}{b}\right) . DE(y) :: KL\left(y - \frac{aa}{c}\right) . LE(x)$. Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui eſt une équation à une hyperbole que l'on conſtruira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E.

* *Art.* 57.

EXEMPLE XI.

59. Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, FIG. 43.

doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté de C l'espace a dans le temps c, & dans l'autre du côté de F l'espace b dans le même temps c: on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible pour parvenir de C en F.

Si l'on fait $a \,.\, CE\,(u) :: c \,.\, \frac{cu}{a}$. Et $b \,.\, EF\,(z) :: c \,.\, \frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le temps que le voyageur emploie à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il emploie à parcourir EF; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit * qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

* *Art.* 56.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI; l'on aura $a \,.\, b :: GL \,.\, GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parceque les triangles rectangles GEL & ECA, GEI & EHD sont égaux & semblables entre eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue AE, x; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connues AB, f; AC, g; BF, h; les triangles semblables EBF, EDH donneront $EB\,(f - x) \,.\, BF\,(h) :: ED\left(\frac{bx}{a}\right) \,.\, DH = \frac{bhx}{af - ax}$. Mais à cause des triangles rectangles EDH, EAC, qui ont leurs hypothénuses EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est-à-dire, en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$. De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{lllll} aax^4 - 2aafx^3 & + aaffxx & - 2aafggx & + aaffgg = 0. \\ - bb \quad + 2bbf & + aagg & & \\ & - bbff & & \\ & - bbhh & & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniere qui ſuit, ſans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f; AC, g; Bf, h; & l'inconnue AE, x; on fera $a . CE$ $(\sqrt{gg+xx}) :: c . \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au temps que le voyageur emploie à parcourir la droite CE. Et de même $b . EF$ $(\sqrt{ff-2fx+xx+hh}) :: c . \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au temps que le voyageur emploie à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = à un *moindre*; & partant ſa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$ $= 0$; d'où l'on tire, en diviſant par cdx & en ôtant les incommenſurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. Soit une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D ſuſpendu par la corde DFB qui paſſe au-deſſus de la poulie F, & qui eſt attachée en B, enſorte que les points C, B ſont ſitués dans la même ligne horizontale CB. On ſuppoſe que la poulie & les cordes n'aient aucune peſanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

Il eſt clair par les principes de la Mécanique que le plomb D deſcendra le plus bas qu'il lui ſera poſſible, au-deſſous de l'horizontale CB; d'où il ſuit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi nommant les données CF, a; DFB, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura

$EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa+cc-2cx} + \sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand* ; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = o$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, & divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = o$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniere que voici.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand* ; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre ; & partant si du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entre elles ; & par conséquent les petits triangles rectangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypothénuse Ff commune, seront égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entre eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD ; les triangles CBF, CFH seront semblables ; comme aussi les triangles rectangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD ; & par conséquent on aura

$$CH = \frac{aa}{c}, \text{ \& } HE \left(x - \frac{aa}{c}\right) . EF(y) :: EF(y) . EC(x).$$

Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE