ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR L'INTELLIGENCE
DES LIGNES COURBES.

PAR M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL.

NOUVELLE ÉDITION,

Revue & augmentée par M. LE FEVRE.

Prix 12 liv. relié.

A PARIS,

Chez ALEX. JOMBERT, jeune, Libraire pour le Génie & l'Artillerie, rue Dauphine, près du Pont Neuf.

M. DCC. LXXXI.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.

TABLE.

ANALYSE

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFÉRENCES.

SECTION PREMIERE

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DÉFINITION I.

ON appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; &, au contraire, quantités *conſtantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainſi, dans une parabole, les appliquées & les coupées ſont des quantités variables, au lieu que le parametre eſt une quantité conſtante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite, dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la *différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB, qui ait pour axe ou diametre la ligne AC, & pour FIG. 1.

une de ſes appliquées la droite PM; & ſoit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'on mene MR parallele à AC; les cordes AM, Am; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM, le petit arc de cercle MS; Pp ſera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour baſe l'arc Mm, ſera la différence du ſegment AM; & le petit eſpace $MPpm$, celle de l'eſpace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

COROLLAIRE.

1. Il eſt évident que la différence d'une quantité conſtante eſt nulle ou zéro : ou (ce qui eſt la même choſe) que les quantités conſtantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On ſe ſervira dans la ſuite de la note ou caractériſtique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une ſeule lettre ; &, pour éviter la confuſion, cette note* d *n'aura point d'autre uſage dans la ſuite de ce calcul. Si l'on nomme, par exemple, les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'eſpace mixtiligne* APM, s; *& le ſegment* AM, t; dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit eſpace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE ou SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puiſſe prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui eſt la même choſe) qu'une quantité qui n'eſt augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puiſſe être conſidérée comme demeurant la même. On demande,

par exemple, qu'on puiſſe prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'eſpace Apm pour l'eſpace APM, le petit eſpace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit ſecteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puiſſe être conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui eſt la même choſe) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, leſquels déterminent, par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puiſſent être conſidérés comme des lignes droites, à cauſe de leur infinie petiteſſe, en ſorte que le petit triangle mSM puiſſe être cenſé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On ſuppoſe ordinairement dans la ſuite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; &, au contraire, que les premieres*, a, b, c, *&c. marquent des quantités conſtantes : de ſorte que* x *devenant* x + dx, y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* * *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

PROPOSITION I.

Problême.

4. *Prendre la différence de pluſieurs quantités ajoutées enſemble, ou ſouſtraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$, dont il faut prendre la différence. Si l'on ſuppoſe que x ſoit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'eſt-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y deviendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la conſtante a, * elle * *Art.* 1.

demeurera la même a : de ſorte que la quantité propoſée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & ſa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $dx + dy - dz$. Il en eſt ainſi des autres ; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées ou ſouſtraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité propoſée, & retenant les mêmes ſignes, on en compoſera une autre quantité qui ſera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. *Prendre la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lorſque x devient $x + dx$, & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$ qui eſt le produit de $x + dx$ par $y + dy$; & ſa différence ſera $ydx + xdy$
* *Art.* 2. $+ dxdy$, c'eſt-à-dire * $ydx + xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car ſi l'on diviſe, par exemple, ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

2°. La différence de xyz eſt $yzdx + xzdy + xydz$. Car, en conſidérant le produit xy comme une ſeule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de ſa différence $ydx + xdy$ par la ſeconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent, en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette regle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de ax est $x0 + adx$, c'est-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. *Prendre la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entre elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissements ou diminutions seront aussi égales entre elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit &c.; d'où l'on forme cette regle.

* Art. 5.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. *Prendre la différence d'une puissance quelconque, parfaite ou imparfaite, d'une quantité variable.*

Il est nécessaire, afin de donner une regle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposants.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposants formeront une progression arithmétique.

Prog. géom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au-dessous de l'unité, & l'arithmétique au-dessous de zéro, les termes de celle-ci seront les exposants de ceux auxquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. géom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra, pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expresſions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne ſignifient que la même choſe.

Prog. géom. $1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$
Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, \ 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$
Prog. géom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$
Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2.\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2.\ -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ eſt moyenne géométrique entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{2}$ eſt moyenne arithmétique entre leurs expoſants zéro & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ eſt la premiere des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{3}$ eſt la premiere des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs expoſants zéro & 1 : & il en eſt ainſi des autres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions.

1°. Que la ſomme des expoſants de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'eſt-à-dire ſon quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 eſt le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'eſt-à-dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ou $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatrieme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſants de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de ces termes. Ainſi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=x^{-\frac{7}{12}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'eſt la même choſe de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviſer $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en eſt ainſi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différents cas.

Premier cas, lorſque la puiſſance eſt parfaite, c'eſt-à-dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre entier. La différence de xx eſt $2xdx$, de x^3 eſt $3xxdx$, de x^4 eſt $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre choſe que le produit de x par x, ſa différence * ſera $xdx+xdx$, c'eſt-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre choſe que le produit de x par x par x, ſa différence * ſera $xxdx+xxdx+xxdx$, c'eſt-à-dire $3xxdx$; & comme il en eſt ainſi des autres puiſſances à l'infini, il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m ſera $mx^{m-1}dx$.

* *Art.* 5.

Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ ſera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorſque la puiſſance eſt imparfaite, c'eſt-à-dire lorſque ſon expoſant eſt un nombre rompu. Soit propoſé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on ſuppoſera $x^{\frac{m}{n}}=z$, & en élevant chaque membre à la puiſſance n, on aura $x^m=z^n$, & en prenant les différences, comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx=nz^{n-1}dz$, & $dz=\frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$ ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} ſa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de

x

$x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$.

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $m x^{m-1} dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $\overline{ay - xx}$, c'eſt-à-dire de $\overline{ay - xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{a dy - 2x dx} = 3a^3 yy dy - 6aaxxydy + 3ax^4 dy - 6aayyxdx + 12ayx^3 dx - 6x^5 dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, ou de $\overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3} \times \overline{ax + xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}$ $\times\overline{adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$ $+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

* *Art.* 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ ſera ſelon cette regle * & celle des fractions $\dfrac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^2}\times\sqrt{xy+yy}\;\frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$

REMARQUE.

Il eſt à propos de bien remarquer que l'on a toujours ſuppoſé en prenant les différences, qu'une des variables x croiſſant, les autres y, z, &c. croiſſoient auſſi ; c'eſt-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître, & changer par conſéquent les ſignes des termes où les différences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée *, les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent : ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

* *Art.* 5.